

N O T I C E

THIS DOCUMENT HAS BEEN REPRODUCED FROM
MICROFICHE. ALTHOUGH IT IS RECOGNIZED THAT
CERTAIN PORTIONS ARE ILLEGIBLE, IT IS BEING RELEASED
IN THE INTEREST OF MAKING AVAILABLE AS MUCH
INFORMATION AS POSSIBLE

095642D

Geophysikalische
Arbeiten sowie
Mitteilungen aus
Meteorologie und
Astrophysik

RECEIVED BY
ESA - SDS
DATE: 30 OCT 1980
DCAF NO. 002631
PROCESSED BY
☐ NASA STI FACILITY
☒ ESA - SDS ☐ AIAA

Scanning for:

cihl	
PB	
INIS	
EDB	

Vorwerken 168

Die Dämpfung seismischer Wellen und ihre
Bestimmung aus Reflexionsseismogrammen

Ludwig Engelhard

GAMMA 38, 257 S. (1980)

MÄRZ 1979

Institut für Geophysik und Meteorologie
der Technischen Universität Braunschweig

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	4
2. Ausbreitung seismischer Wellen bei Absorption <i>seismic waves and seismic absorption</i>	10
2.1. Die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums mit komplexen Konstanten; elastische Hysterese; Definition des Qualitätsfaktors (Q)	10
2.2. Einige Beispiele zur linearen und nicht-linearen Absorption	36
2.3. Absorption seismischer Wellen in Flüssigkeiten	53
3. Dämpfung seismischer Wellen durch Streuung <i>attenuation of seismic waves by scattering</i>	60
4. Dispersionsrelationen <i>dispersion relations</i>	70
4.1. Allgemeine Aufstellung der Dispersionsrelationen und das Beispiel des komplexen Brechungsindex' der Optik	71
4.2. Dispersionsrelationen für elastische Wellen und ihre Bedeutung	82
4.3. Komplexe Übertragungsfunktion für lineare Dämpfungsprozesse	104
5. Zur Absorption seismischer Wellen im Erdkörper	110
6. Reflexion und Transmission elastischer Wellen an Schichtgrenzen bei Absorption <i>Reflection and transmission of elastic waves at boundaries, layers etc.</i>	118

	Seite
7. Zur Bestimmung der Dämpfung seismischer Wellen aus Reflexionsseismogrammen	148
7.1. Grundzüge der Methode	148
7.2. Störeinflüsse durch Interferenzen	164
7.3. "Stapeln" im Frequenzbereich	170
7.4. Auto- und Kreuzkovarianzfunktion	178
7.5. Methode der Modellspektren	191
7.6. Interferenzbereinigung durch homomorphes Filtern und praktische Absorptionsbestim- mung	200
8. Literatur	227
9. Anhang: Dispersionsrelationen für das seismische wavelet	240
Zusammenfassung	251
Danksagung	256

1. Einleitung

Die klassische Methode der Erkundung der Erde durch elastische Wellen, die Seismologie, besteht in der Beobachtung von Laufzeiten der Wellen. In der Erdbebenseismologie hat man aus dem Studium der Ankunftszeiten der verschiedenen reflektierten und refraktierten Einsätze ein sehr genaues Bild vom inneren Aufbau der Erde gewinnen können. Zusätzlich hat die Beobachtung der Dispersion der Oberflächenwellen, d.h. Beobachtung der Laufzeit für verschiedene Frequenzen, zu detaillierten Erkenntnissen über den Aufbau der Erdkruste und des Erdmantels geführt, die weitere Schlußfolgerungen über den physikalischen Zustand der Materie erlauben. - In der Explorationssismologie, speziell in der Reflexionsseismik, hat die Laufzeitauswertung heute einen hohen Grad an Vollkommenheit erreicht: Tiefenschnitte der geologischen Schichten, deren Grenzen sich durch Reflexionen abzeichnen, werden durch "Routine-Processing" erstellt, Geschwindigkeits-Tiefen-Pläne werden dabei gleichzeitig gewonnen, spezielle Dekonvolutionsverfahren verbessern im individuellen Fall das Hervortreten der Reflexe in der seismischen Sektion, und Migrationsverfahren erlauben die Korrektur der Reflektorgeometrie bei stark geneigten oder gekrümmten Horizonten.

Die neueren gerätetechnischen Entwicklungen etwa zu Beginn der 70er Jahre (Breitbandseismologie, Digitalseismik, "true amplitude recovery") haben dem Geophysiker die Möglichkeit gegeben, sich über das bisherige Auswerteverfahren hinaus zusätzliche Interpretationshilfen durch Amplituden- und Frequenz-Untersuchungen zu verschaffen. Der Erdbebenseismologe wird dabei vorwiegend an die spektrale Übertragungsfunktion des Erdkörpers mit seinen verschiedenen Schichten und an den Frequenzinhalt des Erdbebenherdes denken, der Prospektionsgeophysiker wird an zur Geschwindigkeit zusätzliche lithologische Parameter denken.

So hat man sich zunächst sehr viel davon versprochen, in der seismischen Sektion den Verlauf der Reflexionsamplitude längs eines Horizontes zu analysieren, nachdem man "wahre Amplituden" aufzuzeichnen in der Lage war; denn der Reflexionskoeffizient, abhängig vom Kontrast der akustischen Impedanz $\rho \cdot c$ an einer Schichtgrenze, kann sich erheblich ändern, je nachdem, ob das Liegende (oder Hangende) eine mit Gas oder mit Flüssigkeit gefüllte Gesteinsmatrix ist - und allgemeiner: je nach fazieller Ausbildung der geologischen Strukturen. Man erkannte jedoch bald, daß Aufhellungen und Abschwächungen der Reflexionsamplituden auch durch andere Effekte, z.B. Strahlbündelung oder Strahlenzerstreuung durch Brechung an nicht ebenen Horizonten, hervorgerufen werden können, und damit war ein Großteil jener Euphorie vergangen, in der man sich mit dieser "bright-spot"-Auswertung (z.B. O'Brien, P.N.S. [1977], Hammond, A.L. [1974], Lindsey, J.P. [1974]) einen nahezu untrüglichen Schlüssel zum Auffinden, mindestens genauen Lokalisieren einer Erdöl-Erdgas-Lagerstätte erhoffte.

Anstatt sich direkt auf Signalamplituden zu beschränken, muß man also eine genauere Amplitudenanalyse vornehmen und dazu die Amplituden für einzelne Frequenzen analysieren, also spektrale Zerlegungen vornehmen. Dabei geht dann also wesentlich die spektrale Übertragungseigenschaft des Mediums ein; diese wäre 1 für alle Frequenzen, wenn das Medium als ideal-elastisch angenommen wird. Mit der Fragestellung nach der spektralen Übertragungseigenschaft geht man also - abgesehen von den pauschalen Effekten von Feinschichtungen - von der in der Laufzeitseismik gemachten Annahme ideal-elastischen Verhaltens ab und schließt anelastische Prozesse und Streuung an Inhomogenitäten des Mediums mit ein. Dies bedeutet, daß man es nun mit gedämpften Wellen zu tun hat; in der Nomenklatur der Optik würde man die Absorption und Streuung als "Extinction" bezeichnen.

Von besonderem Interesse für die Geophysik ist die Absorption, weil man hofft, hieraus weitere Schlüsse zunächst auf das rheologische Verhalten des Mediums, und hieraus wiederum auf

physikalische Grundgrößen, wie etwa die Temperatur, oder petrophysikalische Werte (Porosität, Matrixfüllung, Fazies) zu schließen.

Der Erdbebenseismologe wird sich also besonders für die Absorption im oberen Erdmantel interessieren, wo eine Zone erniedrigter Wellengeschwindigkeit partielles Schmelzen nahelegt, nachdem wir wissen, daß die Absorption seismischer Wellen in höheren Druck- und Temperaturbereichen exponentiell von der Temperatur abhängen sollte; hierfür sind die thermisch aktivierten Fließprozesse verantwortlich (z.B. Jackson, D.D. und D.L. Anderson [1970], McKenzie, D.P. [1967], Anderson, D.L. und R.S. Hart [1978], Anderson, D.L. und R. O'Connell [1967]).

Der Prospektionsgeophysiker wird dagegen mehr die petrophysikalischen Parameter im Vordergrund sehen, insbesondere die Füllung der Gesteinsmatrix, nachdem wir wissen, daß die Absorption eines porösen und permeablen Gesteins nicht nur hinsichtlich seiner Größe, sondern besonders auch hinsichtlich seines - gegenüber der festen Gesteinsmatrix - anderen Frequenzverlaufes seine Porenfüllung anzeigt (z.B. Mavko, G.M. und A. Nur [1979], Nur, A. [1978], Knopoff, L. [1964]).

Auf die physikalischen Mechanismen der Absorptionsprozesse, die zum Themenkreis der Gesteinsphysik gehören, wollen wir im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingehen. Vielmehr soll es darum gehen, die Dämpfung seismischer Wellen phänomenologisch zu beschreiben, mit Messungen zu vergleichen und eine Methode zu entwickeln, mit der die Dämpfung seismischer Wellen aus Reflexionsseismogrammen ermittelt werden kann. Zunächst werden wir in Kapitel 2.1 die Dämpfung (Absorption und Streuung, Extinction) in einer verallgemeinerten Formulierung der Elastizitätstheorie (elastische Moduln und Wellenzahl komplexwertig) beschreiben und den Extinctionskoeffizienten und den Q-Faktor definieren. Dann werden wir in Kapitel 2.2 einige einfache rheologische Modelle zur linearen und zur nichtlinearen Absorption, die auch in der Literatur die Grundlage vieler Betrachtungen sind, diskutieren als Beispiele für den konkreten

Zusammenhang zwischen nichtideal-elastischem Verhalten und den komplexen elastischen Moduln bzw. dem Absorptionskoeffizienten. Ein Spezialfall unter diesen Beispielen ist das rheologische Verhalten von Flüssigkeiten, und da dieses in der Prospektionsseismik (Öl, Wasser) von Bedeutung sein mag, wird in Kapitel 2.3 die Absorption seismischer Wellen in Flüssigkeiten noch im einzelnen ausführlicher diskutiert.

Da man bei Messungen an seismischen Wellen nur deren Dämpfung beobachten kann, muß neben den nichtideal-elastischen Materialeigenschaften, die zur Absorption seismischer Energie führen, auch die Streuung abgehandelt werden. Messungen zur Streuung seismischer Wellen sind so gut wie nicht vorhanden, so daß wir uns im Rahmen des Kapitels 3 auf die theoretischen Ansätze zur Behandlung des elastischen Streuproblems sowie auf Analogieschlüsse aus Messungen im Ultraschallbereich beschränken.

Bereits an den Beispielen in Kap. 2.2 und 2.3 läßt sich erkennen, daß - je nach Modell - neben dem Absorptionskoeffizienten auch die Phasengeschwindigkeit der Wellen frequenzabhängig wird, d.h. die Wellen erleiden eine Dispersion. Daß eine Dispersion von Wellen eine notwendige Konsequenz einer Dämpfung ist (sofern das rheologische Verhalten linear ist, d.h. Spannungen und Deformationen dem Superpositionsprinzip genügen), wird in Kapitel 4 ausführlich begründet; es werden schließlich in Kap. 4.2 Integralbeziehungen ("Dispersionsrelationen") angegeben, die den Extinctionskoeffizienten mit der Phasengeschwindigkeit und umgekehrt verknüpfen. Dadurch ist es möglich, eine komplexe Übertragungsfunktion der Wellenausbreitung dämpfenden Mediums aufzustellen (Kap. 4.3), deren Imaginärteil (Veränderung des Phasenspektrums durch frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit) und deren Realteil (Veränderung des Amplitudenspektrums durch Dämpfung) durch einen einzigen Dämpfungsparameter (Extinctionskoeffizient oder Q-Faktor) beschrieben wird.

Im Kapitel 5 wollen wir uns dann einen Überblick über Methoden und Ergebnisse der Absorptionsbestimmung (genauer eigentlich: Extinctionsbestimmung) von Erdbebenwellen im Erdkörper verschaffen; dabei werden wir bereits der Frage der - wenn auch geringen - Dispersion, wie sie in Kap. 4 diskutiert wurde, begegnen. Bevor wir dann zur entsprechenden Fragestellung nach der Dämpfung seismischer Wellen in der Erdkruste übergehen, müssen wir noch die Reflexion und Transmission seismischer Wellen an Kontakten von Medien mit Dämpfung (und Dispersion) untersuchen, weil die Untersuchungsmethoden zur seismischen Erforschung der Erdkruste auf Reflexion und Transmission aufbauen. Dies wird in Kapitel 6 geschehen, und wir werden dabei auf sog. inhomogene Wellen geführt, wenngleich das Problem in Allgemeinheit zu kompliziert ist, um eine überschaubare Lösung zu liefern. Zumindest aber für die Reflexionsseismik werden wir die brauchbare Näherung der vertikalen Inzidenz explizit angeben können.

Im Kapitel 7 wenden wir uns nun zunächst der Methodik zu, die Dämpfung seismischer Wellen in Reflexionsseismogrammen zu bestimmen. Da Phasenspektrum und Amplitudenspektrum durch die Dispersionsrelationen (Kap. 4) zusammenhängen, läßt sich die Dämpfung entweder aus dem Amplituden- oder aus dem Phasenspektrum bestimmen. Leider stören die Interferenzen interner multipler Reflexionen, so daß das Hauptproblem bei der praktischen Dämpfungsbestimmung in der Entwicklung von Methoden liegt, diese Interferenzen zu unterdrücken. In Kap. 7.3, 7.4, 7.5 und 7.6 werden verschiedene Verfahren und Ansätze mit dieser Zielsetzung diskutiert und an praktischen Daten demonstriert. Als erfolgreichste Methode wird in Kap. 7.6 dann eine vereinfachte Variante des homomorphen Filterns vorgestellt, an einigen praktischen Datenbeispielen demonstriert und schließlich auf zwei seismische Profile angewandt. So kann man einmal den Verlauf der Dämpfung längs eines Profils in Norddeutschland in verschiedenen Sedimentformationen sehen und im zweiten Beispiel die Dämpfung im Bereich der tieferen Erdkruste bis zur Moho-Diskontinuität längs einer antisynklinalen Tiefenstruktur.

Von Interesse mag schließlich sein, daß Dispersionsrelationen für jedes seismische Wavelet selbst gelten, d.h. Real- und Imaginärteil seines Spektrums sind Hilbert-Transformierte zueinander. Im Anhang wird dazu ein Beispiel zur Demonstration gezeigt. Zuvor muß noch die Hilbert-Transformation für die numerische Anwendung diskretisiert werden, was wegen der auftretenden Polstellen nicht mit einer einfachen Formel zur numerischen Integration geschehen kann.

An verschiedenen Stellen der Arbeit, besonders in Kap. 2.1 und Kap. 4.2, wird die Fragestellung: linearer oder nichtlinearer Absorptionsprozeß, d.h. Gültigkeit des Superpositionsprinzips für Spannungen und Deformationen, herausgearbeitet.

Ziel der Arbeit ist es also, die Dämpfung im wellentheoretischen Bilde phänomenologisch zu beschreiben und einzuordnen und eine Methode zu entwickeln, mit der die Dämpfung aus reflexionsseismischen Messungen für die Erdkruste bestimmt werden kann.

2. Ausbreitung seismischer Wellen bei Absorption

Im folgenden wird aus der Elastizitätstheorie eine Wellengleichung entwickelt, die auch bei nicht ideal-elastischem Medium anwendbar ist. Bei der Herleitung wird auch Augenmerk auf thermische Einflüsse gelegt, soweit sie in einer phänomenologischen Elastizitätstheorie enthalten sind und nicht zu den individuellen gesteinsphysikalischen Eigenschaften gehören.

2.1. Die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums mit komplexen Konstanten; elastische Hysterese; Definition des Qualitätsfaktors (Q)

Es seien

x_i die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes des Kontinuums im undeformierten Zustand und

x_i' diejenigen des gleichen Punktes, jedoch im deformierten Zustand.

Dann wird der Verrückungsvektor \vec{u} definiert durch:

$$x_i' = x_i + u_i(x_i, t) \quad (2.1.1)$$

Durch die Deformation ändert sich das Längenelement ds :

$$ds'^2 = ds^2 + 2 \varepsilon_{ik} dx_i dx_k \quad *) \quad (2.1.2)$$

mit den Abkürzungen

$$ds'^2 = dx_i'^2 \quad ds^2 = dx_i^2$$

*) Es soll hier wie im folgenden die übliche Konvention gelten, daß über Indizes, welche in einem Ausdruck zweifach auftreten, von 1 bis 3 zu summieren ist.

wobei ϵ_{ik} der Deformationstensor ist, welcher für kleine Verformungen bekanntlich lautet:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.3)$$

ϵ_{ik} ist, wie man an (2.1.3) auch sofort sieht, ein symmetrischer Tensor.

Es sei σ_{ik} der Spannungstensor, so daß

$$P_i = \oint \sigma_{ik} df_k \quad (2.1.4)$$

die Resultante der am Volumen angreifenden Oberflächenkräfte ist, wobei df_k die Komponenten des Flächenelementes sind, eines Vektors, der stets in Richtung der äußeren Normalen der Fläche liegt.

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes^{*)} kann man das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umwandeln, dann wird:

$$P_i = \iiint \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dv \quad (2.1.5)$$

Das Kontinuum befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Trägheitskräfte

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dv$$

den angreifenden Kräften, also P_i und F_i , gleich sind, wobei F_i die Summe aller Volumenkräfte, also z.B. die Schwerkraft

$$\iiint \rho \cdot g_i dv$$

*)

$$\oint A_n df = \iiint \operatorname{div} \vec{A} dv$$

beschreiben soll. Da diese Bedingung für jeden Volumenbereich des Kontinuums erfüllt sein muß, gilt

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \cdot g_i \quad (2.1.6)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Kontinuums.

Verwendet man darüber hinaus die Bedingung, daß das Kontinuum auch hinsichtlich der angreifenden Momente im Gleichgewicht sein muß, so folgt bekanntlich die Symmetrie des Spannungstensors σ_{ik} (z.B. Budó, A. [1967], S. 348).

Die Bewegungsgleichung (2.1.6) stellt einen Zusammenhang zwischen den Spannungen σ_{ik} und den Verrückungen u_i her. Um zu einer lösbaren Gleichung für die u_i zu gelangen, müssen wir einen weiteren Zusammenhang zwischen den Verrückungen und den Spannungen finden, um σ_{ik} eliminieren zu können. Einen solchen Zusammenhang liefert uns die Beschreibung des mechanischen Verhaltens (elastische und rheologische Eigenschaften) des Festkörpers. Im einfachsten Fall werden die σ_{ik} und ϵ_{ik} linear miteinander verknüpft ("Hooke'sches Gesetz"):

$$\sigma_{ik} = c_{ikmn} \epsilon_{mn} \quad (2.1.7)$$

Die c_{ikmn} werden "elastische Koeffizienten" genannt. Wegen der Symmetrie von σ_{ik} und ϵ_{mn} (jedes hat nur 6 unabhängige Elemente) sind zunächst 36 elastische Koeffizienten zu erwarten. Da die elastische Energie eine homogene, quadratische Funktion der Deformation ist

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} c_{ikmn} \epsilon_{ik} \epsilon_{mn} \quad (2.1.8)$$

muß c_{ikmn} hinsichtlich (i,k) und (m,n) symmetrisch sein;

dadurch verbleiben 21 voneinander unabhängige elastische Koeffizienten^{*)}.

Im folgenden wollen wir uns auf den Fall des homogenen und isotropen Mediums beschränken. Die elastische Energie muß daher hinsichtlich ihrer Form translations- und dreh-invariant sein. Hieraus folgt, daß im Falle des homogenen und isotropen Körpers nur noch zwei unabhängige elastische Koeffizienten existieren. Die Beziehung (2.1.7) läßt sich dann auf die Form

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} \quad (2.1.12)$$

bringen, λ und μ werden die "Lamé'schen Elastizitätsmoduln" genannt. Entsprechend erhält man für die elastische Energie^{*)}

$$W = \frac{1}{2} \left[\lambda \varepsilon_{ii}^2 + 2\mu \varepsilon_{ik}^2 \right] \quad (2.1.13)$$

^{*)} Da die elastische Energie sich aus Integration über

$$dW = \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} \quad (2.1.9)$$

berechnet, entsteht - weil σ_{ik} durch (2.1.7) selbst von ε_{ik} abhängt - ein Integral des Typs

$$\int_0^{\varepsilon_{\max}} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\varepsilon_{\max}} \quad (2.1.10)$$

und dies führt dazu, daß dann, wie bereits in (2.1.8) und (2.1.13) berücksichtigt, die Energie W den Faktor $1/2$ erhält:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \cdot \varepsilon_{ik} \quad (2.1.11)$$

Das Hooke'sche Gesetz des homogenen, isotropen Mediums (2.1.12) muß erweitert werden, wenn die Temperatur des Mediums inhomogen ist. Denn durch thermische Volumenänderung hat eine Temperaturinhomogenität eine entsprechende Veränderung des Spannungsfeldes zur Folge. Das Hooke'sche Gesetz müßte dann um

$$\epsilon_{ik, therm} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \delta_{ik} \quad (2.1.14)$$

erweitert werden, wobei α der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient und $\Delta T = T - T_0$ die Temperaturanomalie ist. Es wird dann als "Duhamel-Neumann'sches Gesetz" bezeichnet (vgl. z.B. Sokolnikoff, I.S. [1956], S. 359; Nadeau, G. [1964], S. 57). Bis auf den Effekt des Energieverlustes infolge der Wärmeleitfähigkeit (vgl. Kap. 2.3) spielt der "thermische Deformationszustand" für unsere weiteren Betrachtungen keine Rolle; denn wir interessieren uns für die Ausbreitung elastischer Wellen, also für Wechselbelastungen des Mediums, die Temperaturdeformation ist dagegen statisch (in der späteren Bewegungsgleichung (2.1.20) würde ein Term von (2.1.14) sich wie eine Volumenkraft, also wie $\rho \cdot \vec{g}$, verhalten, ohne Einfluß auf die Wellenausbreitung in bezug auf \vec{u}).

Die Temperatureigenschaften des Mediums kommen jedoch in den elastischen Moduln zum Ausdruck. Wir müssen daran denken, daß wir, wenn wir im folgenden elastische Wellen betrachten, mit den elastischen Moduln λ und μ nicht jene isothermen Moduln meinen, sondern daß wir im allgemeinen in guter Näherung (die Näherung besteht in der Vernachlässigung der Wärmeleitung beim Durchgang der Welle, s.u.) mit den adiabatischen Moduln rechnen müssen. Geht man von den Beziehungen für den Elastizitätsmodul und die Poisson'sche Zahl aus, wie diese etwa bei Landau-Lifschitz VII, [1966], S. 19, hergeleitet sind, so erhält man für λ_{ad} und μ_{ad} :

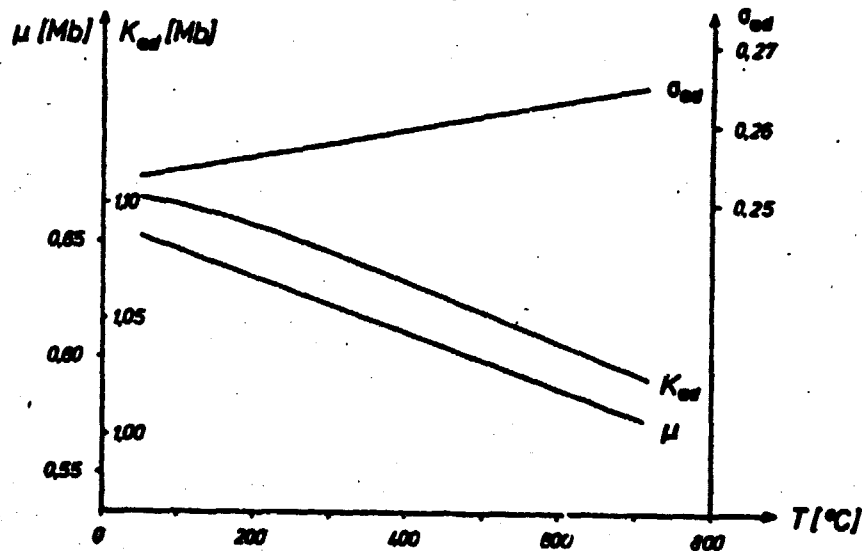
$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ad} &= \lambda_T + \frac{T \cdot \alpha^2}{\rho \cdot c_p} (3\lambda_T + 2\mu_T)^2 \\ \mu_{ad} &= \mu_T \end{aligned} \right\} \quad (2.1.15)$$

wobei die Näherung

$$(3\lambda_T + 2\mu_T) \cdot \frac{T \alpha^2}{\rho c_p} \ll 1 \quad (2.1.16)$$

verwendet wurde, und die Lamé'schen Moduln mit Index T die isothermen Moduln darstellen. c_p ist die spezifische Wärme bei konstantem Druck.

Weiter haben wir zu berücksichtigen, daß (neben der Dichte ρ in (2.1.6)) die elastischen Parameter, hier also λ und μ , ja selbst temperaturabhängig sind (sie nehmen mit steigender Temperatur im allgemeinen ab, s. Fielitz, K. [1971a]).



Temperaturabhängigkeit des adiabatischen Kompressionsmoduls K_{ad} , des Schermoduls μ und des adiabatischen Poisson'schen Verhältnisses σ_{ad} für Peridotit (Probe 10) unter einem Druck von 4,1 kb.

Abb. 1: Adiabatische elastische Moduln als Funktion der Temperatur, ein Beispiel nach Fielitz [1971a]; ($K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$).

Alle drei Faktoren, nämlich die Temperaturabhängigkeit der Dichte, die Verwendung der adiabatischen anstatt der isothermen Moduln (gemäß (2.1.15)), sowie die Temperaturabhängigkeit der elastischen Moduln selbst, führen zusammen auf die beobachtete Abnahme der elastischen Wellengeschwindigkeiten mit steigender Temperatur, z.B. Fielitz, K., [1971a,b]. Sie beträgt meist weniger als 1 % für 100 Grad Temperaturerhöhung, bei Temperaturen, wie wir sie in der Erdkruste zu erwarten haben. Bei Fielitz, K., [1971a] finden wir auch Literaturhinweise sowohl auf theoretisch wie auf experimentelle Untersuchungen dieses Zusammenhangs.

Trägt man das Hooke'sche Gesetz (2.1.12) in die Bewegungsgleichung (2.1.6) ein, so erhält man die elastische Bewegungsgleichung:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \rho \cdot g_i \quad (2.1.17)$$

Diese Gleichung soll noch, der besseren Anschaulichkeit wegen, in vektorieller anstatt in Komponenten-Schreibweise angegeben werden. Bedenkt man, daß

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} \quad (2.1.18)$$

und:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} u_i = \Delta \vec{u} \quad (2.1.19)$$

ist, so wird:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \cdot \vec{g} \quad (2.1.20A)$$

Unter Benutzung der Identität

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = \Delta \vec{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} \quad (2.1.21)$$

läßt sich die Gleichung umformen in

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \rho \cdot \vec{g} \quad (2.1.20B)$$

Wenn wir elastische Wellen betrachten, werden wir in (2.1.20) die adiabatischen Moduln λ_{ad} und μ_{ad} verwenden. Weil jedoch die Medien in der Natur eine Wärmeleitfähigkeit besitzen, breiten sich Kompressionswellen nicht "ideal"-adiabatisch aus, sondern es kommt zu einer Energiedissipation, die zu einer Absorption, also Energieverminderung der Wellen, Anlaß gibt; auf diesen Absorptionsprozeß wird in Kap. 2.3 noch einmal eingegangen.

Bei festen Materialien hat die Absorption elastischer Wellen ganz überwiegend seine Ursache im unelastischen Verhalten des Materials. Damit sind die irreversiblen Vorgänge bei mechanischer Beanspruchung des Materials gemeint, wie Kriech- und Fließvorgänge, elastische Nachwirkungen, innere Reibung, Korngrenzen-Effekte usw. Die Untersuchung derartiger Vorgänge im einzelnen ist Aufgabe der Gesteinsphysik und soll hier nicht ausführlicher behandelt werden. Die Arbeiten und Untersuchungen zu diesem Thema, die im Rahmen metallphysikalischer und werkstoffkundlicher Fragestellungen (z.B.: Zener, Cl. [1965]; Zener, Cl. [1937/1938]; Mason, W.P. [1958]) behandelt werden, sind für die Geophysik nur von begrenztem Wert, da diese im allgemeinen unter der Voraussetzung wohldefinierter Materials (etwa Einkristalle oder Homogenität bei Polykristallen, tiefe Temperaturen, hohe Frequenzen o.ä.) ausgeführt werden. In der Geophysik haben wir es oft mit komplizierten Mineralien unter extremen Temperatur-Druck-Bedingungen zu tun, die auch hinsichtlich ihres Gefüges recht uneinheitlich sein können. Die Untersuchungen des unelastischen Verhaltens von Materialien,

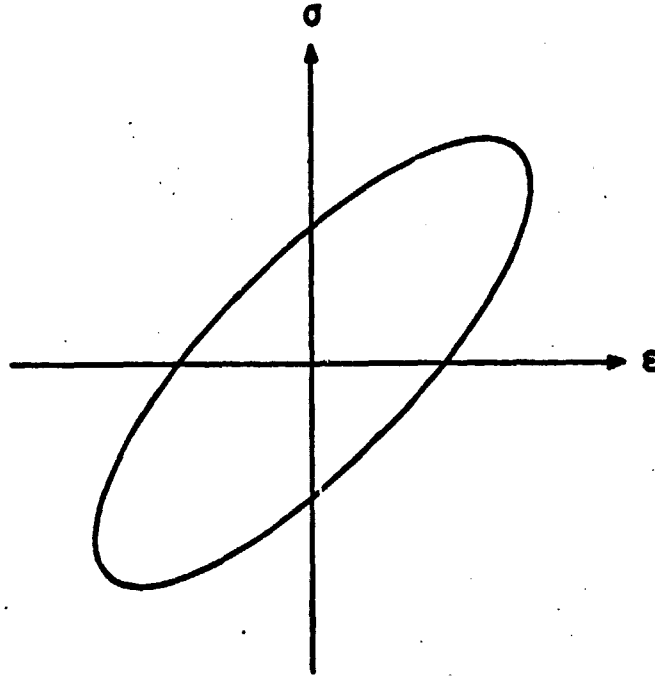
die für die Geophysik interessieren, sind daher weit komplexer. Zusammenfassende Arbeiten zu diesem Thema sind etwa Knopoff, L., [1964]; Jackson, D.D. und D.L. Anderson [1970]; Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958]; Kogan, S.Ya. [1966]; Anderson, D.L. [1967], sowie zahlreiche weitere Arbeiten aus den Proceedings of the International Upper Mantle Committee Symposium on Non-Elastic Processes in the Mantle, 1966 [1967].

Hier sollen die unelastischen Eigenschaften in phänomenologischer Form in die Theorie eingebaut werden: Ohne Annahmen über den speziellen Absorptionsmechanismus läßt sich feststellen, daß die Dämpfung elastischer Wellen durch Absorption einem Verlust an mechanischer Energie durch Umwandlung in Wärme entspricht. Dieser Energieverlust pro Volumenelement ΔW ist bekanntlich für eine Periode durch die Fläche der elastischen Hysterese gegeben (eine Periode entspricht gerade dem einmaligen Umlauf um die Hysterese), nach (2.1.9) also:

$$\Delta W = \oint \sigma_{ik} d\epsilon_{ik} \quad (2.1.22)$$

(2.1.22) stellt die Summe der Energien gemäß (2.1.8) dar, die aus irreversibler Formänderung bei Entlastung verbleiben. Der Energieverlust, also die Absorption, verschwindet, wenn die Hysterese fläche Null wird; dazu bräuchte keineswegs eine lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung (Hooke'sches Gesetz mit konstanten Moduln) gelten. Eine Hysterese entsteht immer dann, wenn Spannung und Dehnung in ihrem periodischen zeitlichen Verlauf nicht mehr in Phase sind.

Im einfachsten Fall nehmen wir eine von den Deformationen bzw. den Spannungen unabhängige, also konstante Phasenverschiebung δ an. Dann entsteht als Hysterese eine Ellipse, die für $\delta = 0$ zur Geraden entartet^{*)} ^{**)} :



Wir wollen den periodisch-zeitabhängigen Verlauf von $\epsilon_{ik}(t)$ und $\sigma_{ik}(t)$ in der komplexen Schreibweise darstellen. Wie üblich, wird nur dem Realteil der komplexen Zeitfunktion physikalische Bedeutung gegeben. Im verlustfreien Medium gilt das Hooke'sche Gesetz (2.1.12) ja ungeändert auch für zeitlich sich ändernde, z.B. periodische Dehnungen und Spannungen. Damit sich zwischen Dehnungen und Spannungen ein Phasenunterschied findet, muß man die elastischen Moduln λ und μ komplexwertig verstehen; denn die phasenverschobene Zeitfunktion

^{*)} σ und ϵ soll irgend ein Paar zusammengehöriger Spannung und Dehnung sein, z.B. σ_{xx} und ϵ_{xx} .

^{**)} Wenn $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \cos \omega t$ ist und $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot \cos(\omega t - \delta)$, so stellen diese beiden Funktionen in der σ - ϵ -Ebene eine Ellipse in Parameterdarstellung dar.

$$e^{i(\omega t + \delta)} = e^{i\delta} \cdot e^{i\omega t} = (a + ib) \cdot e^{i\omega t}$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 entspricht entspricht entspricht entspricht entspricht
 $\sigma(t)$ λ bzw. μ $\epsilon(t)$ λ bzw. μ $\epsilon(t)$

wobei $a = \cos \delta$ und $b = \sin \delta$

entsteht aus der ursprünglichen Zeitfunktion $e^{i\omega t}$ durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $z = a + ib$. Der Phasenwinkel ist durch

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Imag.-Teil von } z}{\text{Real -Teil von } z} \quad (2.1.23)$$

gegeben.

Ist die Phasenverschiebung δ keine Konstante, sondern hängt diese noch von den Deformationen (bzw. Spannungen) selbst ab, so lassen sich auch kompliziertere Formen einer Hysterese als die Ellipse beschreiben. In Betracht von (2.1.23) bedeutet aber Abhängigkeit von δ von den Deformationen eine Abhängigkeit der elastischen Moduln selbst von den Deformationen, also letzten Endes - wegen (2.1.12) - eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Wir nehmen nun an, daß für kleine Deformationen, wie bei seismischen Wellen, das Materialgesetz linear sei - und damit als Konsequenz das Superpositionsprinzip für elastische Deformationen und Spannungen gültig sei^{*)}. Offenbar bestehen allerdings an dieser Annahme - die wir für alles Folgende gelten lassen wollen - Zweifel aufgrund verschiedener Labor- und in-situ-Messungen; dabei muß allerdings angemerkt werden, daß die Deformationsamplituden bei Laborversuchen im allgemeinen größer sind als die, die als seismische Wellenamplitude auftreten.

^{*)} Nach Knapoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958] und O'Brien, P.N.S. [1961] kann man auch nichtlineare Stoffgesetze für kleine Amplituden linearisieren, so daß Superpositionsprinzip und Fourierzerlegung anwendbar bleiben.

Anders formuliert: Die Komplexwertigkeit der elastischen Moduln ist notwendig, um elastische Absorption zu beschreiben - also notwendig, um eine Hysteresefläche entstehen zu lassen (Phasenverschiebung zwischen σ und ϵ). Selbst wenn im quasistatischen Belastungsversuch ein lineares σ - ϵ -Stoffgesetz ohne Hysterese gefunden wird, mag es bei schnelleren Belastungsänderungen zur Phasenverschiebung und damit zur Hysterese kommen, sobald nämlich die Imaginärteile der elastischen Moduln für $\omega \rightarrow 0$ verschwinden. Ein solches Verhalten zeigen die einfacheren linearen Modelle zur Rheologie (vgl. Kap. 2.2), so daß die elliptische Hysterese bzw. die konstante (von ϵ unabhängige) Phasenverschiebung δ von der Frequenz abhängen können und für $\omega \rightarrow 0$ verschwinden.

Nichtlineare Absorption setzt voraus, daß die quasistatische σ - ϵ -Beziehung nichtlinear ist, d.h., daß die elastischen Moduln von den Deformationen selbst abhängig werden und damit auch die Phasenverschiebung δ . Damit verlaufen dann auch Belastungs- und Entlastungsversuch auf verschiedenen σ - ϵ -Wegen; man erhält - bereits im quasistatischen Versuch - Hystereseflächen, und deren Umkehrpunkte sind spitz ausgebildet [Stacey, F.D. et al., 1975]. Neuere Messungen an Basalten und Graniten mit sehr kleinen Amplituden weisen dagegen wieder auf ein lineares Absorptionsgesetz mit elliptischer Hysterese hin [Brennan, B.J. und F.D. Stacey, 1977].

Nichtlineare Absorption - aufgrund nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Beziehung - hat wegen der Krümmung der σ - ϵ -Kurve zur Folge, daß zu einer Grundfrequenz auch höhere Harmonische auftreten und daß auf diese Weise elastische Wellenenergie niedriger Frequenz in höhere Frequenzbänder convertiert wird.

So ist deshalb das Superpositionsprinzip, und damit die Analyse des unelastischen Verhaltens durch Fourierzerlegung bei allgemeinen Amplituden nicht mehr möglich.

Trotz der beobachteten spitzen Enden an der Hysterese bei größeren quasistatischen Belastungsversuchen im Labor scheinen andererseits Beobachtungen der Puls-Verbreiterung^{*)} beim Durchgang durch ein absorbierendes Medium einen linearen Absorptionsmechanismus naheulegen [Stacey, F.D., et al., 1975]. Ebenso scheint das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Unabhängigkeit der Absorption von Wellen verschiedener Frequenz erfüllt zu sein, ein Hinweis auf lineares Absorptionsverhalten (mindestens bei kleinen Amplituden, vgl. Fußnote S. 20). Die Frage der linearen oder der nichtlinearen Absorption ist also heute noch nicht abschließend geklärt, es bedarf hier weiterer Labormessungen und auch in situ-Messungen (vgl. Kap. 7.1) verschiedener Art. Für uns scheint die Annahme linearen Absorptionsverhaltens insofern gerechtfertigt, also offenbar alle Wellenausbreitungsphänomene (nicht-quasistatische Hysterese) sich einem linearen Prozeß fügen (kleine Amplituden im Sinne der Fußnote S. 20).

Außer den bei Stacey, F.D. et al. [1975] diskutierten nichtlinearen Absorptionsmechanismen von White, J.E. [1966], Walsh, J.B. [1966], und von Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1960] finden wir in der Monographie von White, J.E. [1965] über die Ausbreitungs- und Absorptionsphänomene seismischer Wellen die nichtlinearen Modelle von Loeb, J. [1961] und Förtsch, O. [1956] behandelt. Diese führen übrigens zum Teil zu frequenzproportionalen Absorptionskoeffizienten (wie dies die Beobachtung im Labor und aus seismischen Messungen verlangt); vgl. Kap. 2.2.

^{*)} Hier mag erwähnt werden, daß die ganze Fragestellung nach der Form des seismischen Impulses an dieser Stelle von Interesse ist. Änderungen der Pulsform sind bedingt durch frequenzabhängige Absorption (hohe Frequenzen werden stärker als niedrige gedämpft, mithin wird der niederfrequente Anteil eines Impulses zunehmend größer im Verhältnis zu den hohen Frequenzen, der Impuls wird breiter). Ricker, N. [1953] hat als erster aus der Impulsformänderung ein Absorptionsgesetz herzuleiten versucht, vgl. auch Kap. 4.2.

Mit der komplexen Festlegung der Moduln λ und μ soll jetzt der Energieverlust ΔW mit (2.1.22) berechnet werden für den einfachen Fall der linearen Absorption, also konstanter Phasenverschiebung δ (Hysterese ist eine Ellipse). Konstante Phasenverschiebung δ heißt, daß diese nicht von Deformationen abhängt, und da die Deformationen (periodische) Zeitfunktionen sind, daß δ auch nicht von der Zeit abhängt.

Mit:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.1.24)$$

und also

$$d\varepsilon_{ik} = i\omega \varepsilon_{ik}^{(0)} \cdot e^{i\omega t} dt \quad (2.1.25)$$

wird zunächst der Integrand von (2.1.22) berechnet, wobei wir berücksichtigen, daß dort unter σ_{ik} und $d\varepsilon_{ik}$ jeweils nur die Realteile der komplexen Zeitfunktionen verstanden werden dürfen^{*)}:

$$\operatorname{Re}(\sigma_{ik}) \cdot \operatorname{Re}(d\varepsilon_{ik}) = \frac{\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^*}{2} \cdot \frac{d\varepsilon_{ik} + d\varepsilon_{ik}^*}{2} \quad (2.1.26)$$

Folgende Bezeichnungen für Real- und Imaginärteile der komplexen elastischen Moduln sollen gelten:

$$\lambda = \lambda_R + i \lambda_I \quad (2.1.27)$$

$$\mu = \mu_R + i \mu_I \quad (2.1.28)$$

Damit ergibt sich aus (2.1.12) mit (2.1.26) im einzelnen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} + \sigma_{ik}^* &= 2 \left[\lambda_R \cdot \varepsilon_{ii}^{(0)} \cdot \delta_{ik} + 2\mu_R \cdot \varepsilon_{ik}^{(0)} \right] \cdot \cos \omega t \\ &\quad - 2 \left[\lambda_I \cdot \varepsilon_{ii}^{(0)} \cdot \delta_{ik} + 2\mu_I \cdot \varepsilon_{ik}^{(0)} \right] \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.1.29)$$

^{*)} Mit z^* werde die zu z konjugiert komplexe Zahl bezeichnet.

$$d\varepsilon_{ik} + d\varepsilon_{ik}^* = -2\omega \varepsilon_{ik}^{(0)} \sin \omega t dt \quad (2.1.30)$$

Damit ergibt die Integration, zunächst allgemein ausgeführt mit $\omega \cdot t = x$, $\omega \cdot dt = dx$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\varepsilon_0} \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} \\ &= \frac{1}{2} \left[\lambda_R \cdot (\varepsilon_{kk}^{(0)})^2 + 2\mu_R \cdot (\varepsilon_{ik}^{(0)})^2 \right] \cdot (cm^2 x)_0^{x_0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\lambda_I \cdot (\varepsilon_{kk}^{(0)})^2 + 2\mu_I \cdot (\varepsilon_{ik}^{(0)})^2 \right] \cdot (-\sin x \cos x - x) \Big|_0^{x_0} \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Zur Berechnung des Energieverlustes ΔW beim einmaligen Umlauf um die Hysteresis gemäß (2.1.22) haben wir die Integration also über eine Periode, d.h. von $x = \omega \cdot t = 0$ bis $x_0 = \omega \cdot T = 2\pi$ auszuführen. Man erhält so unter der oben gemachten Voraussetzung konstanter elastischer Moduln:

$$\Delta W = \pi \cdot \left[\lambda_I \cdot (\varepsilon_{kk}^{(0)})^2 + 2\mu_I \cdot (\varepsilon_{ik}^{(0)})^2 \right] \quad (2.1.32)$$

Wie erwartet, hängt der Energieverlust allein von den Imaginärteilen der elastischen Moduln ab.

Wir berechnen noch die maximale elastische Energie W_{\max} , die während eines 'Zyklus' auftritt, weil man den Quotienten

$$\frac{W_{\max}}{W_{\max}} \approx \frac{2\pi}{Q} \quad (2.1.33)$$

gern als Kenngröße für die absorptiven Eigenschaften des Mediums verwendet ("loss parameter"). Die hieraus definierte Größe Q wird als "Gütefaktor" oder "Qualitätsfaktor" ("quality factor") bezeichnet, da Q um so größer ist, je kleiner die Verluste ΔW sind (z.B. Knopoff, L. [1964] oder Stacey, F.D. et al. [1975]).

Die Berechnung der Maximalenergie W_{\max} eines Zyklus' erfolgt ebenfalls nach (2.1.31), wobei wir aber zuvor noch denjenigen Wert $x_0 = \omega \cdot t_0$ berechnen müssen, für den W den Maximalwert annimmt: Aus

$$\frac{\partial W}{\partial x_0} = 0 \quad \text{für Maximalwert von } W$$

folgt für diesen Wert $(x_0)_{\max}$

$$\operatorname{tg} (x_0)_{\max} = \frac{[\lambda_R \cdot (\epsilon_{ee}^{(0)})^2 + 2\mu_R \cdot (\epsilon_{ie}^{(0)})^2]}{[\lambda_I \cdot (\epsilon_{ee}^{(0)})^2 + 2\mu_I \cdot (\epsilon_{ie}^{(0)})^2]} \quad (2.1.34)$$

Mit diesem Wert für $(x_0)_{\max}$ hat man in (2.1.31) einzugehen und erhält dann W_{\max} . Die allgemeine Formel wird - wie ersichtlich - sehr kompliziert; wir beschränken uns deshalb auf den in der Geophysik allein relevanten Fall schwacher Absorption, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_I \ll \lambda_R \\ \mu_I \ll \mu_R \end{array} \right\} \quad (2.1.35)$$

Dann wird

$$\operatorname{tg} (x_0)_{\max} \rightarrow - \quad \text{d.h.} \quad (x_0)_{\max} \approx \frac{\pi}{2}$$

Damit in (2.1.31), bei gleichzeitigem Streichen der Imaginäranteile gemäß (2.1.35), ergibt

$$W_{\max} \approx - \frac{1}{2} [\lambda_R \cdot (\epsilon_{ee}^{(0)})^2 + 2\mu_R \cdot (\epsilon_{ie}^{(0)})^2] \quad (2.1.36)$$

Das negative Vorzeichen rührt vom Umlaufsinn längs der Hysterese her, der durch Vorzeichenwahl in (2.1.24) des Exponenten und damit Vorzeichen von (2.1.30) bestimmt wird.

Damit ergibt sich - gemäß (2.1.33) - der Q-Faktor für die Näherung der schwachen Absorption:

$$Q \approx \frac{\lambda_e \cdot (\epsilon_{ee}^{(c)})^2 + 2\mu_e \cdot (\epsilon_{ik}^{(c)})^2}{\lambda_I \cdot (\epsilon_{ee}^{(c)})^2 + 2\mu_I \cdot (\epsilon_{ik}^{(c)})^2} \quad (2.1.37)$$

Zunächst einmal muß dazu bemerkt werden, daß, wenn die Moduln λ und μ in Real- und Imaginärteil frequenzunabhängig sind (also auch die Hysterese nicht frequenzabhängig ist), der Gütefaktor Q von der Frequenz unabhängig ist^{*)}. Die Messungen an Gesteinen zeigen in den meisten Fällen ein solches, annähernd konstantes, also frequenzunabhängiges Q . Leider führen jedoch einfache Modellvorstellungen nicht auf konstantes Q (also nicht auf frequenzunabhängige Moduln hinsichtlich Real- und Imaginärteil), vgl. Kap. 2.2. Dies bringt beträchtliche Interpretationsschwierigkeiten und führt auch von diesem Aspekt auf die Frage, ob nicht vielleicht nichtlineare Absorptionsprozesse maßgebend sein könnten.

Von der allgemeinen Formel (2.1.37) betrachten wir kurz die beiden Spezialfälle reiner Kompressionsschwingungen und reiner Scherschwingungen. Für reine Kompressionsschwingungen sind alle ϵ_{ik} mit $i \neq k$ Null, denn ϵ_{11} stellt die relative Volumenänderung (z.B.: Budd, A. [1967]) dar:

$$\epsilon_{ee} = \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\Delta(dV)}{dV} \quad (2.1.38)$$

^{*)} Dies gilt sogar auch in all den Fällen, in denen die Frequenzabhängigkeit von λ und μ als ein gleicher Faktor darstellbar ist, der in (2.1.37) gekürzt werden kann. - Außerdem hier die Voraussetzung linearer Absorption!

Es folgt aus (2.1.37) für Q_p *):

$$2\pi \frac{W_{max}}{\Delta W} \Big|_p = Q_p = \frac{\lambda_R + 2\mu_R}{\lambda_R + 2\mu_R} = \frac{1}{\frac{Im(M)}{Re(M)}} \quad (2.1.39)$$

Oder mit (2.1.23), der Definition des Phasenwinkels:

$$2\pi \frac{W_{max}}{\Delta W} \Big|_p = Q_p = \frac{1}{\tan \delta_M} \approx \frac{1}{\delta_M} \quad (2.1.40)$$

Wobei M , wie üblich (z.B.: White, J.E. 1965], S. 95) als Abkürzung für

$$M = \lambda + 2\mu \quad (2.1.41)$$

benutzt wurde, und - weil der die Hysterese erzeugende Phasenwinkel δ klein ist, verglichen mit 1 (schwach absorbierendes Medium), wurde $\tan \delta_M$ durch δ_M selbst ersetzt. Die Beziehung (2.1.40) besagt, daß die Absorption ΔW (pro Zyklus und Volumen) proportional zur Phasenverschiebung δ ist (und Q frequenzunabhängig, wenn δ frequenzunabhängig ist).

Bei reinen Scherschwingungen ist $\epsilon_{11} = 0$ und wir gewinnen aus (2.1.37) ganz analog:

$$2\pi \frac{W_{max}}{\Delta W} \Big|_s = Q_s = \frac{1}{\mu_I / \mu_R} \approx \frac{1}{\delta_\mu} \quad (2.1.42)$$

*) Der Index "p" steht - in Anlehnung an die Seismik für Kompressionsbelastung, der Index "s" entsprechend für Scherbelastung.

Es geht hervor, daß der Gütefaktor Q für Scherwellen und für Kompressionswellen im allgemeinen verschieden ist.

Wir können nunmehr die Wellenausbreitung in einem absorbierenden Medium untersuchen. Wir fragen nach den Lösungen der Gleichung (2.1.17) bzw. (2.1.20), bei der - zur Beschreibung der Absorption - die elastischen Moduln komplex angesehen werden; deren Realteile sollen dabei die adiabatischen elastischen Moduln sein.

Die Gleichung (2.1.16) bzw. (2.1.20) stellt eine inhomogene Wellengleichung dar. Die Volumenkraft $\rho \cdot \vec{g}$ (und im Falle eines Duhamel-Neumann'schen Gesetzes durch (2.1.14) in (2.1.12): zusätzlich der Gradient des Temperaturfeldes) stellt eine Inhomogenität der Differentialgleichung dar. Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich additiv aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung ("Wellengleichung") und einer partikulären Lösung^{*)} der inhomogenen Gleichung zusammen. Wegen dieser Möglichkeit der Auftrennung der Lösung haben die Inhomogenitäten (Schwere, Temperatur) keinen Einfluß auf die Wellenausbreitung. Wir beschränken uns im folgenden also auf die Lösung der homogenen Wellengleichung. Formal geschieht dies genauso wie bei reellen Moduln λ und μ . Mit dem Ansatz

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad (2.1.43)$$

wobei

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (2.1.44)$$

$$\operatorname{rot} \vec{u}_2 = 0 \quad (2.1.45)$$

erhält man bekanntlich zwei Wellengleichungen für \vec{u}_1 und \vec{u}_2 ; \vec{u}_1 stellt eine Transversalwelle, \vec{u}_2 eine Longitudinalwelle

^{*)} Bei Sokolnikoff, I.S. [1956], S. 361, findet man z.B. eine Methode zur Berechnung einer Partikularlösung für gegebene Temperaturverteilung angegeben.

dar. Die Phasengeschwindigkeiten ergeben sich aus den Konstanten in den Wellengleichungen:

$$\underline{c}_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = c_s + i c_s' \quad (2.1.46)$$

sowie (vgl. (2.1.41)):

$$\underline{c}_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{M}{\rho}} = c_p + i c_p' \quad (2.1.47)$$

Weil λ und μ komplex sind, sind jetzt also auch die Geschwindigkeiten komplex.

Denkt man an die Grundlösungen der Wellengleichung für ebene Wellen, die sich in z-Richtung ausbreiten:

$$\vec{u}_{1,2} = \vec{A}_{s,p} \cdot e^{-i(\underline{k}_{s,p} \cdot \vec{z} - \omega t)} \quad (2.1.48)$$

so folgt aus dem Einsetzen dieses Ansatzes in die Wellengleichung:

$$\underline{k}_{s,p} = \frac{\omega}{\underline{c}_{s,p}} \quad (2.1.49)$$

Die komplexen Geschwindigkeiten führen also auf eine komplexe Wellenzahl, deren Realteil $K_{s,p}$ und deren Imaginärteil $-a_{s,p}$ genannt werde:

$$\underline{k}_{s,p} = \frac{\omega}{\underline{c}_{s,p}} = K_{s,p} - i a_{s,p} \quad (2.1.50)$$

Die Komplexwertigkeit der Wellenzahl \underline{k} liefert uns nun auch formal die gedämpfte Welle, wie es aus der komplexen Definition der elastischen Moduln zu erwarten war. Denn trägt man

(2.1.50) in (2.1.48) ein, so ergibt sich:

$$\vec{u}_{1,2} = \vec{A}_{s,p} \cdot e^{-i(k_{s,p} \vec{z} - \omega t) - \alpha_{s,p} \cdot \vec{z}} \quad (2.1.51)$$

Für den periodischen Anteil dieser gedämpften Welle bestimmt der Realteil von \hat{k} die "räumliche Periode" der Welle, die Wellenlänge Λ :

$$\begin{aligned} k_{s,p} &= \frac{2\pi}{\Lambda_{s,p}} = \operatorname{Re} \left(\frac{\omega}{\hat{c}_{s,p}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\omega \cdot \hat{c}_{s,p}^*}{\hat{c}_{s,p} \cdot \hat{c}_{s,p}^*} \right) \\ &= \frac{\omega \cdot c_{s,p}}{c_{s,p}^2 + c_{s,p}^{1,2}} \\ &= \frac{\omega}{v_{s,p}} \approx \frac{\omega}{c_{s,p}} \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

Dabei ist die so definierte Größe $v_{s,p}$ die Phasengeschwindigkeit im Medium mit Berücksichtigung der Absorption, die im realistischen Falle "schwacher Absorption", also

$$c_{s,p}^{1,2} \ll c_{s,p} \quad (2.1.53)$$

*) Dies ist identisch mit der Aussage, daß die Imaginärteile der Moduln klein gegenüber deren Realteilen seien, vgl. dazu (2.1.47), oder mit (2.1.23) auch, daß der Phasenwinkel zwischen Deformation und Spannung klein sei.

durch den Realteil von $\tilde{\kappa}_{s,p}$ dargestellt wird.

Der Imaginärteil von $\tilde{\kappa}_{s,p}$ folgt ebenfalls aus (2.1.49) sofort; mit (2.1.50) wird dann:

$$\begin{aligned} -\alpha_{s,p} &= \operatorname{Im} \left(\frac{\omega}{\tilde{\kappa}_{s,p}} \right) \\ &= -\omega \frac{C'_{s,p}}{C_{s,p}^2 + C_{s,p}^{\prime 2}} \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

Für "schwache Absorption" (2.1.53) also

$$\alpha_{s,p} \approx K_{s,p} \cdot \frac{C'_{s,p}}{C_{s,p}} \quad (2.1.55)$$

Nach (2.1.51) bestimmt diese Größe die "Eindringtiefe" der Welle in das absorbierende Medium. Man nennt $a_{s,p}$ den "Extinctionskoeffizienten", wenn mit ihm sowohl Absorption als auch Streuung beschrieben wird; kommt die Dämpfung allein durch Absorption zustande, so ist $a_{s,p}$ der "Absorptionskoeffizient".

Da die elastische Energiedichte W für die Welle $\sim (\vec{u})^2$ ist, ist die Abklingkonstante α für die Energiedichte

$$\alpha_{s,p} = 2 a_{s,p} \quad (2.1.56)$$

Wenn die elastischen Moduln von der Frequenz abhängen, werden auch die Phasengeschwindigkeiten $\tilde{\kappa}_{s,p}$ frequenzabhängig; damit wird $\tilde{\kappa}$ nicht mehr zu ω proportional und

$$\tilde{\kappa}_{\text{Gruppe}} = \frac{d\omega}{d\tilde{\kappa}} \neq \frac{\omega}{\tilde{\kappa}} \quad (2.1.57)$$

wir haben Dispersion.

Mit den Lösungen (2.1.51) für die Verrückungen wird die elastische Energie nach (2.1.13) unter Berücksichtigung von (2.1.3):

$$W \sim e^{-2\alpha_{s,p} \cdot z} = e^{-\alpha \cdot z} \quad (2.1.58)$$

Der Energieverlust ΔW für eine Periode nach (2.1.22) ist bei der sich ausbreitenden Welle als Energieverlust für eine Wellenlänge λ zu berechnen:

$$\Delta W = -\lambda \frac{\partial W}{\partial z} \sim \alpha \cdot \lambda \cdot e^{-\alpha \cdot z} \quad (2.1.59)$$

Dann wird

$$\frac{\Delta W}{W_{\max}} = \frac{2\pi}{Q_{s,p}} = \alpha_{s,p} \cdot \lambda_{s,p} = 2\alpha_{s,p} \cdot \lambda_{s,p} \quad (2.1.60)$$

Mit (2.1.52) läßt sich noch umformen:

$$\left. \begin{aligned} Q_{s,p} &= \frac{\pi}{\alpha_{s,p} \cdot \lambda_{s,p}} = \frac{k_{s,p}}{2\alpha_{s,p}} = \frac{\omega}{\alpha_{s,p} \cdot v_{s,p}} \\ &= \frac{\pi \cdot f}{\alpha_{s,p} \cdot v_{s,p}} \approx \frac{\omega}{2\alpha_{s,p} \cdot c_{s,p}} \approx \frac{\pi \cdot f}{\alpha_{s,p} \cdot c_{s,p}} \end{aligned} \right\} (2.1.61)$$

Damit ist ein Zusammenhang zwischen dem Qualitätsfaktor - zunächst definiert durch die elastische Hysterese, die in den Imaginärteilen der elastischen Moduln ihre formale Ursache

*) Einfach zu berechnen aus:

$$\begin{aligned} -dW &= W(z) - W(z+dz) = e^{-\alpha z} [1 - (1 - \alpha dz)] \\ &= \alpha \cdot dz \cdot e^{-\alpha z} \end{aligned}$$

hat (2.1.39), (2.1.42) - und dem Extinctionskoeffizienten hergestellt.

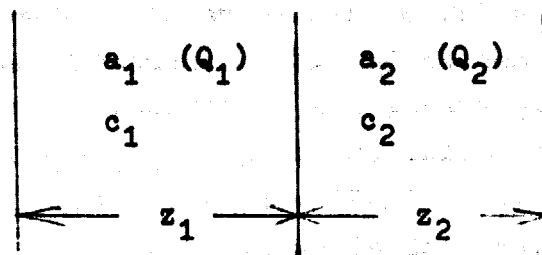
Der hier hergestellte Zusammenhang mit dem aus der elastischen Hysteresefläche berechneten Q-Faktor gilt in dieser Form nur in der Näherung für schwache Absorption. Denn infolge der Absorption selbst, bedeutet die Betrachtung der Abnahme der Wellenenergie längs der Wellenausbreitungsrichtung den Umlauf um eine sich spiralig verengende Hysterese. Die Absorption, formal berechnet aus dem Umlauf um die geschlossene Hysteresefläche gemäß (2.1.39) bzw. (2.1.42) wird also stets sich größer ergeben als die auf dem Ausbreitungsweg für eine Wellenlänge λ bezogene Absorption; dieser Unterschied ist vernachlässigbar bei schwacher Absorption, er wird aber bedeutsam bei starker Absorption (letzterer Fall ist für die Ausbreitung seismischer Wellen ohne Interesse).

Wir sehen dies deutlich, wenn wir etwa statt der Näherung (2.1.37) exakt rechnen würden; dann würde im Zähler ein komplizierterer Ausdruck stehen, gemäß (2.1.31) mit (2.1.34). Mit

$$\sin x = \frac{tg x}{\sqrt{1 + tg^2 x}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$$

könnte man die trigonometrischen Funktionen in (2.1.31) durch arithmetische Ausdrücke der rechten Seite von (2.1.34) ausdrücken; es verbliebe aber der letzte Summand in (2.1.31), der direkt mit $(x_0)_{\max}$ geht. Vergleicht man ihn mit (2.1.32), so zeigt sich, daß er gerade zu ΔW proportional ist; genau diesen Term müßte man streichen, wenn man die Energieabnahme, damit Amplitudenabnahme pro Zyklus in (2.1.31) berücksichtigen würde für eine Wellenausbreitung wie hier und man es nicht mit einer zyklischen, von außen aufgeprägten Deformation konstanter Amplitude (Laborexperimente) zu tun hat.

Wir wollen nun noch den Fall untersuchen, daß zwei Medien mit unterschiedlichem Absorptionskoeffizient aneinander anschließen. Es habe das Medium 1 die Mächtigkeit z_1 und den Absorptionskoeffizienten a_1 , bzw. den Qualitätsfaktor Q_1 die Geschwindigkeit c_1 , das Medium 2 entsprechend z_2 , a_2 bzw. Q_2 und c_2 :



Dann folgt aus (2.1.58):

(a) nach Durchlaufung von Medium 1:

$$W(z_1) = W_0 e^{-2a_1 z_1}$$

(b) daran anschließend durch Medium 2:

$$\begin{aligned} W(z_1 + z_2) &= W_0 e^{-2a_1 z_1} \cdot e^{-2a_2 z_2} \\ &= W_0 e^{-2(a_1 z_1 + a_2 z_2)} \end{aligned}$$

(c) Faßt man beide Medien zu einer einzigen "pauschalen"

Schicht der Mächtigkeit $z = z_1 + z_2$, dem Absorptionskoeffizienten a bzw. Qualitätsfaktor Q und Geschwindigkeit c zusammen, so daß also gelten soll:

$$W(z) = W_0 e^{-2a z}$$

so folgt für den zusammengefaßten ("pauschalen") Absorptionskoeffizienten:

$$a \cdot z = a_1 z_1 + a_2 z_2$$

oder auch

(2.1.62)

$$a = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2}{z_1 + z_2}$$

Schreibt man mit (2.1.61) auf die Q um, wobei man beachtet, daß

$$\frac{z_1}{c_1} = \Delta t_1$$

$$\frac{z_2}{c_2} = \Delta t_2$$

(2.1.63)

$$\frac{z}{c} = \frac{z_1 + z_2}{c} = \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

die Laufzeitdauern der Welle im jeweiligen Medium sind (wo die Durchschnittsgeschwindigkeit c gerade so definiert ist, daß $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ ist), dann gilt

$$\frac{\Delta t}{Q} = \frac{\Delta t_1}{Q_1} + \frac{\Delta t_2}{Q_2} \quad (2.1.64)$$

Mit (2.1.62) bzw. (2.1.64) haben wir das "Additionsgesetz für Absorption".

2.2. Einige Beispiele zur linearen und nichtlinearen Absorption

Einen allgemeineren Ansatz eines linearen Zusammenhangs zwischen Deformationen und Spannungen versucht man durch Erweiterung des Hooke'schen Gesetzes (2.1.7) zu gewinnen, indem man zeitliche Ableitungen von Spannungen und Dehnungen hinzufügt. Solche Verallgemeinerungen des Hooke'schen Gesetzes beschreiben dann bestimmte Modelle unelastischen Verhaltens. Wir wollen hier als Beispiel nur denjenigen Fall diskutieren, der nur die ersten Ableitungen enthält:

$$\sigma_{ik} + a_{ikmn} \frac{d\epsilon_{mn}}{dt} = c_{ikmn} \epsilon_{mn} + b_{ikmn} \frac{d\epsilon_{mn}}{dt} \quad (2.2.1)$$

Dieses Materialgesetz, bei dem die Größen a_{ikmn} und b_{ikmn} "Relaxations"- bzw. "Retardierungs"-Zeiten darstellen, enthält eine Reihe in der Literatur diskutierter Spezialfälle. Ein Medium, welches einem Stoffgesetz wie (2.2.1) gehorcht, wird allgemein als "standard linear solid" bezeichnet [Hall, I.H., 1968, S. 183].

Ein dieser Gleichung (2.2.1) entsprechendes Stoffgesetz diskutiert Nakamura, S.T. [1949]. Menzel, H. [1954] hat gezeigt, daß die Prozesse des elastischen Nachwirkens ("afterworking"), wie es etwa von Sokoloff, P.T. und Skriabin, V.J. [1937] für die Dämpfung elastischer Wellen vorgeschlagen wurde, ein Spezialfall des Ansatzes von Nakamura, S.T. [1949] und damit ein Spezialfall von (2.2.1) ist. Menzel, H. [1954] selbst verwendet zur Beschreibung des elastischen Nachwirkens eine Modifikation des Ansatzes von Sokoloff, P.T. und Skriabin, V.J. [1937]; und zwar nimmt er elastisches Nachwirken für Scherbeanspruchung, dagegen vollkommen elastisches Verhalten für Kompressionsbeanspruchung an. So erhält er für diese Art unelastischen Verhaltens:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \lambda \epsilon_{cc} \cdot \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik} \\ &+ \beta \int_{-\infty}^t (\epsilon_{cc} \delta_{ik} - 3\epsilon_{ik}) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Durch Differenzieren nach t weist man leicht nach, daß dies elastische Nachwirken ein Spezialfall von (2.2.1) ist. Die Funktion $e^{-\gamma(t-\tau)}$ beschreibt das elastische "Gedächtnis" des Systems; wenn man diese Integralkern-Funktion um δ -Funktionsterme erweitert, könnte man die gesamte rechte Seite von (2.2.2) als Integral schreiben (etwa als Beispiel für den Ansatz (4.2.1)).

Nimmt man zum Hooke'schen Gesetz zunächst nur den Term mit $\frac{d\epsilon}{dt}$ hinzu, so spricht man vom rheologischen Modell der "Firmoviskosität", oder vom "Voigt-Modell" oder vom "Kelvin-Modell". In (2.2.1) sei also zunächst a_{ikmn} Null gesetzt. Symbolisch lautet das Stoffgesetz dann

$$\sigma = c \cdot \epsilon + b \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.2.1-3) \quad *)$$

Der Tensor b_{ikmn} ist der Tensor der "Zähigkeit" (Reibungstensor); durch ihn wird die Fließeigenschaft ("viskoses Fließen") des Materials beschrieben.

Im homogenen und isotropen Fall enthält b_{ikmn} nur zwei voneinander unabhängige Konstanten (z.B.: Landau-Lifschitz VII, [1966], S. 168, 169). Man kann dann für den Term der Viskosität

$$b_{ikmn} \frac{d\epsilon_{mn}}{dt} = \nu \cdot \dot{\epsilon}_{cc} \delta_{ik} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ik} \quad (2.2.3a)$$

schreiben. ν nennt man Volumenviskosität und η die Scherviskosität.

*) Gleichungen (2.2.1-1) und (2.2.1-2) auf S. 40

Oftmals formuliert man, wie z.B. bei Landau-Lifschitz VII [1966] statt dessen:

$$\{\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ik} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ll} \delta_{ik}\} \quad (2.2.3b)$$

wobei dann $\zeta = \nu + \frac{2}{3} \eta$ gesetzt wurde. ζ nennt man Druckviskosität. Diese ist bei einatomigen Gasen bei nicht zu hoher Dichte Null, bei mehratomigen Gasen im allgemeinen von Null verschieden.

Betrachtet man die Bewegungsgleichung (2.1.6), so kommt zu dem bisherigen Hooke'schen Term

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}$$

in der Bewegungsgleichung (2.1.20) bzw. (2.1.16) im firmoviskosen Modell noch zusätzlich der viskose Term

$$(\nu + \eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{u}} - \eta \Delta \dot{\vec{u}}$$

hinzu.

Denkt man speziell an Flüssigkeiten, die ja dadurch "definiert" sind, daß die Scheranteile im Hooke'schen Gesetz (2.1.12), also

$$2\mu (\epsilon_{ik} - \frac{1}{3} \epsilon_{ll} \delta_{ik})$$

verschwinden, gleichbedeutend mit $\mu = 0$ und mithin nur die Kompressionsanteile

$$(\lambda + 2\mu) \epsilon_{ll} \delta_{ik} \longrightarrow \lambda \epsilon_{ll} \delta_{ik} \quad \text{für } \mu = 0$$

verbleiben, so geht die um die Viskositätsterme erweiterte Bewegungsgleichung (2.1.20) bzw. (2.1.16) in die "Navier-Stokes'sche" Gleichung für zähe Flüssigkeiten über ($\mu = 0$); mit

$$\text{Druck } p = -\lambda \operatorname{div} \vec{u}$$

Während eine Flüssigkeit hinsichtlich einer Kompressionsdeformation also einem formalen Stoffgesetz wie (2.2.1-3) gehorcht, verhält es sich hinsichtlich einer Scherspannung formal wie

$$\vec{\sigma}_T = \eta \frac{d\vec{\epsilon}_T}{dt} \quad (2.2.1-4)$$

weil ja eine Flüssigkeit keine Scherfestigkeit ($\mu = 0$), s.o., hat, also kein Anteil mit ϵ selbst bleibt. Ein solches Stoffgesetz (2.2.1-4) nennt man die "Newton'sche Gleichung" für die Viskosität oder "Newton'sches Fließgesetz".

Wegen des zusätzlichen Terms mit $\frac{d\varepsilon}{dt}$ zeigt ein solches firmo-viskoses Medium (2.2.1-3) eine exponentielle Verzögerung zum Erreichen der endgültigen Deformation bei Anwendung einer konstanten Spannung und ebenso natürlich auch beim Wiederherstellen der Ausgangsdeformation beim Abschalten der Spannung (z.B. Bullen, K.E. [1959], Meidav, T. [1964]), s. Abb. 2.



Abb. 2

Die Zeitkonstante $\tau = \eta/c$ zum Einstellen der endgültigen Deformation nennt man die "Retardierungszeit" (retardation-time) [Hall, I.H., 1968].

Ein anderer, in (2.2.1) enthaltener Spezialfall ist der des "elastico-viskosen" Mediums, auch als "Maxwell-Modell" genannt (z.B. Bullen, K.E. [1959]; Hall, I.H. [1968], Meidav, T. [1964]). Hier ist c_{ikmn} Null gesetzt. Symbolisch:

$$\sigma + a \frac{d\sigma}{dt} = b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.2.1-5)$$

Formale Integration führt auf

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \sigma + \frac{1}{b} \int_0^t \sigma dt \quad (2.2.1-6)$$

und zeigt, daß eine zur Zeit $t = 0$ angelegte Spannung, die dann konstant bleibt, eine sofort vorhandene Deformation $a/b \cdot \sigma$ erzeugt, welche dann zeitlich linear wächst. Beim Abschalten der Spannung gibt es eine sofortige entsprechende Deformation um den gleichen anfänglichen Betrag, die jedoch jetzt konstant bleibt ($\sigma = 0$) und daher nicht mehr auf den Ursprungsdeformationszustand des Mediums zurückgeht (Abb. 3). Dynamisch betrachtet sehen wir, daß eine zeitlich konstante oder langsam veränderliche Spannung (σ überwiegt gegen $a \cdot \frac{d\sigma}{dt}$) zu viskosem Fließen führt, während sich das Medium gegenüber schnellen Spannungsänderungen ($a \cdot \frac{d\sigma}{dt}$ überwiegt gegen σ) wie ein elastischer Körper verhält.

Ein derartiges rheologisches Verhalten beobachtet man im oberen Erdmantel, in der Asthenosphäre: Das partielle Schmelzen des Materials erlaubt die langzeitliche Drift der Krustenplatten, ohne daß es in diesen Tiefenbereichen zu Spannungstau, der sich in Erdbeben lösen müßte, kommt. Andererseits jedoch werden die "kurzperiodischen" seismischen Deformationen wie durch einen Festkörper (Scherwellentransmission) übertragen.

Fragt man umgekehrt nach der Veränderung der Spannung σ auf eine gegebene, konstante Deformation ϵ , so findet man die Antwort aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung (2.2.1-5) für σ ($\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ ist Null für konstante Deformation):

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.2.1-7)$$

wobei man $\tau = a$ die "Relaxationszeit der Spannung" nennt; die Spannungen als Folge einer momentanen, aber dann konstanten Deformation klingen zeitlich exponentiell ab^{*)}.

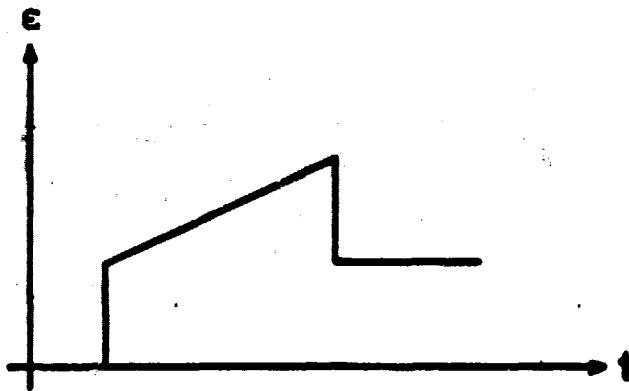


Abb. 3

^{*)} Die allgemeine Lösung von (2.2.1-5) lautet:

$$\sigma(t) = \frac{b}{a} \epsilon(t) - \frac{b}{a^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{a}} \cdot \epsilon'(\tau) d\tau \quad (2.2.1.-8)$$

mit $\tau = a$ als Maxwell'sche Relaxationszeit, wie oben. Für $\epsilon(t) = \text{const} = \epsilon_0$ ergibt sich (2.2.1-7) mit

$$\sigma_0 = \frac{b}{a} \epsilon_0.$$

In der Materialgleichung (2.2.1) sind also alle diese hier diskutierten linearen rheologischen Modelle enthalten. Wenn man die symbolische Gleichung

$$\dot{\sigma} + a \frac{d\sigma}{dt} = c \cdot \epsilon + b \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.2.1-1)$$

formal integriert

$$\int_0^t \dot{\sigma} dt + a \sigma = c \int_0^t \epsilon dt + b \epsilon \quad (2.2.1-2)$$

so sieht man, daß z.B. eine zur Zeit $t = 0$ eingeschaltete Spannung auf eine momentan anfänglich vorhandene Deformation $\epsilon = \frac{a}{b} \sigma$ führt (die Integrale verschwinden für $t \rightarrow 0$)

und daß die nach dem Einschalten weiter konstant gehaltene Spannung auf eine Deformation führt, die exponentiell einem stationären Wert zustrebt, man spricht von Kriechen (creep); (Lösen der Diff'-Gleichung für ϵ und Einsetzen der Anfangsdeformation als Anfangsbedingung), vgl. z.B. Bullen, K.E. [1959], S. 35; Hall, I.H. [1968], S. 176 ff.; Meidav, T. [1964], s. Abb. 4.

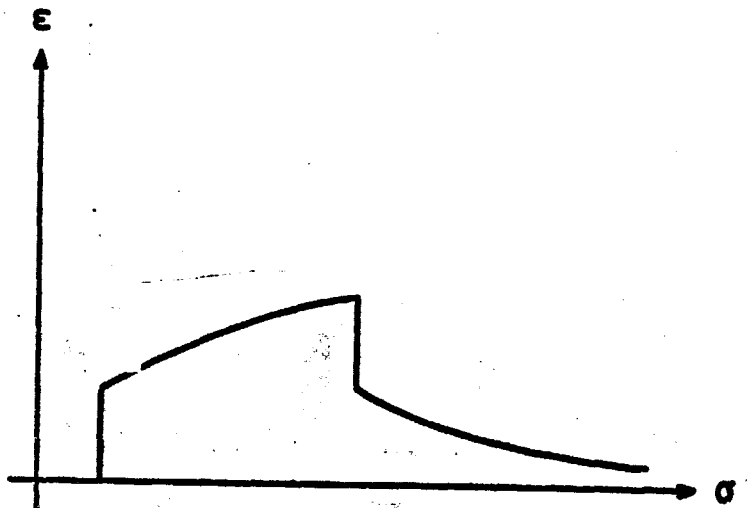


Abb. 4

Für den Fall der Ausbreitung elastischer Wellen werden sich sowohl σ_{ik} als auch ϵ_{mn} periodisch mit der Zeit ändern. Mit dem komplexen Ansatz $e^{i\omega t}$ zur Beschreibung dieser Periodizität werden ja die zeitlichen Ableitungen formal ersetzt:

$$\frac{d^n}{dt^n} \longrightarrow (i\omega)^n \quad (2.2.4)$$

so daß man (2.2.1) auch schreiben kann als:

$$(\delta_{ik} \delta_{mn} + i\omega a_{ik mn}) \sigma_{mn} = (c_{ik mn} + i\omega b_{ik mn}) \epsilon_{mn} \quad (2.2.5)$$

Indem wir also komplexe Tensoren einführen, erhalten wir formal wieder ein Hooke'sches Gesetz (2.1.7):

$$\tilde{a}_{ik mn} \sigma_{mn} = \tilde{c}_{ik mn} \epsilon_{mn} \quad (2.2.6)$$

Dies entspricht genau der komplexwertigen Definition der elastischen Moduln zur Beschreibung einer elastischen Hysteresis in Kap. 2.1.

Durch die Beziehung (2.2.6) werden gegenüber (2.2.1) auch alle jene Fälle mit beschrieben, bei denen noch weitere Terme mit höheren Ableitungen von σ_{mn} und ϵ_{mn} nach der Zeit enthalten sind. Die höheren zeitlichen Ableitungen kommen dann in jeweils entsprechend anderen Abhängigkeiten von der Frequenz ω , gemäß (2.2.4), zum Ausdruck [F. Collins und C.C. Lee [1956], S. 23].

Bleiben wir - als Beispiel - bei (2.2.1), wo lediglich Zeitableitungen 1. Ordnung auftreten. Beim homogenen und isotropen Medium enthalten alle Tensoren bekanntlich stets nur zwei voneinander unabhängige Konstanten (vgl. S. 12 und 13). Diese Konstanten werden je nach Art der Zerlegung der Tensoren formuliert; zerlegt man in einen deviatorischen und einen hydrostatischen Tensor, so wird $b_{ik mn}$ wie (2.2.3b), S.38. Hier wollen wir jedoch entsprechend der hier vorgenommenen Zerlegung des

Tensors $c_{ik mn}$ im Hooke'schen Gesetz (2.1.12) auch $a_{ik mn}$ und $b_{ik mn}$ aufteilen. Für (2.2.1) unter Berücksichtigung des periodischen Zeitverlaufes, also (2.2.4), schreiben wir dann:

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} + i\omega [\tau_1 \sigma_{ee} \delta_{ik} + 2\tau_2 \sigma_{ik}] \\ = \lambda \epsilon_{ee} \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik} + i\omega [\nu \epsilon_{ee} \delta_{ik} + 2\eta \epsilon_{ik}]\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Dabei sind die Tensorkomponenten τ_1 und $2\tau_2$ die "Maxwell'schen Relaxationszeiten" im Sinne von (2.2.1-7), ν und η die in (2.2.3) definierten Zähigkeiten.

Für reine Kompressionswellen ist (im isotropen und homogenen Medium) σ_{ik} und ϵ_{ik} für $i \neq k$ Null, vgl. S. 26

$$[1 + i\omega(\tau_1 + 2\tau_2)] \sigma_{ee} = [(\lambda + 2\mu) + i\omega(\nu + 2\eta)] \epsilon_{ee}$$

oder:

$$\sigma_{ee} = \frac{[(\lambda + 2\mu) + i\omega(\nu + 2\eta)]}{1 + i\omega(\tau_1 + 2\tau_2)} \cdot \epsilon_{ee} \quad (2.2.8)$$

Gegenüber dem ideal-elastischen Fall ist also die elastische Konstante (2.1.41)

$$M = \lambda + 2\mu$$

zu ersetzen durch die komplexe Konstante:

$$(\lambda + 2\mu) \longrightarrow \frac{(\lambda + 2\mu) + i\omega(\nu + 2\eta)}{1 + i\omega(\tau_1 + 2\tau_2)} \quad (2.2.9)$$

Und dies zerlegt nach Real- und Imaginärteil, die wir zur Berechnung von Q_p nach (2.1.39) brauchen:

$$(\lambda + 2\mu) \longrightarrow \frac{(\lambda + 2\mu) + \omega^2 (\nu + 2\eta)(\tau_1 + 2\tau_2)}{1 + \omega^2 (\tau_1 + 2\tau_2)^2} + i\omega \frac{(\nu + 2\eta) - (\lambda + 2\mu)(\tau_1 + 2\tau_2)}{1 + \omega^2 (\tau_1 + 2\tau_2)^2} \quad (2.2.10)$$

Und damit wird der Qualitätsfaktor Q_p selbst:

$$Q_p = \frac{(\lambda + 2\mu) + \omega^2 (\nu + 2\eta)(\tau_1 + 2\tau_2)}{\omega [(\nu + 2\eta) - (\lambda + 2\mu)(\tau_1 + 2\tau_2)]} \quad (2.2.11)$$

Entsprechend gewinnen wir aus (2.2.7) den Qualitätsfaktor Q_s für reine Scherwellen, für welche ja σ_{11} und ϵ_{11} verschwinden; gegenüber dem idealelastischen Fall ist jetzt μ zu ersetzen durch:

$$\mu \longrightarrow \frac{\mu + i\omega\eta}{1 + i\omega \cdot 2\tau_2} \quad (2.2.12)$$

Aufgespalten nach Real- und Imaginärteil:

$$\mu \longrightarrow \frac{\mu + \omega^2 \eta \cdot 2\tau_2}{1 + \omega^2 (2\tau_2)^2} + i\omega \frac{\eta - \mu \cdot 2\tau_2}{1 + \omega^2 (2\tau_2)^2} \quad (2.2.13)$$

Und damit wird schließlich der Gütefaktor für Scherwellen:

$$Q_s = \frac{\mu + \omega^2 \eta \cdot 2\tau_2}{\omega [\eta - \mu \cdot 2\tau_2]} \quad (2.2.14)$$

Je nachdem, ob das rheologische Modell der Beziehung (2.2.1) entspricht oder ob man einen der oben diskutierten Spezialfälle annimmt, sind die Formeln (2.2.11) oder (2.2.14) ggf. durch Nullsetzen entsprechender Konstanten noch zu vereinfachen. Nimmt man noch höhere als erste Ableitungen nach der

Zeit zum Gesetz (2.2.1) hinzu, so werden die Ausdrücke für Q entsprechend komplizierter, und in Zähler und Nenner treten noch entsprechende höhere Potenzen von ω auf.

An den Ausdrücken für die elastischen Moduln, nämlich (2.2.10) und (2.2.13), sehen wir, daß bereits die Realteile frequenzabhängig sind. Das bedeutet selbst in der Näherung für "schwache Absorption" (geringe Abweichung vom ideal-elastischen Fall, Imaginärteile klein gegen Realteile), daß die Phasengeschwindigkeit $c_{S,P}$ (vgl.: (2.1.46) und (2.1.47); (2.1.52); (2.1.53)) frequenzabhängig wird, es liegt Dispersion vor (vgl.: (2.1.57)).

Die ersten systematischen Untersuchungen zur Absorption seismischer Wellen hat wohl Ricker, N. [1953] durch Analyse der Veränderung der Form des seismischen Impulses beim Durchgang durch das Medium versucht (vgl. Fußnote S. 22). Er schloß auf eine quadratische Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten (2.1.56) von der Frequenz, d.h. gemäß (2.1.61) eine umgekehrt proportionale Abhängigkeit von Q von der Frequenz. Dies legte ihm nahe, ein Modell des firmoviskosen Verhaltens (Kelvin-Voigt-Modell) anzunehmen (man setze in (2.2.11) bzw. (2.2.14) die Maxwell-Relaxationszeiten τ_1, τ_2 Null, um das Kelvin-Voigt-Modell zu erhalten). Die Ricker'schen Ergebnisse sind später allerdings einhellig verworfen worden.

So hat z.B. Meidav, T. [1964] das Maxwell-Modell und das Kelvin-Voigt-Modell untersucht und festgestellt, daß beide Modellvorstellungen das phänomenologische Verhalten von Gesteinen nicht beschreiben, sondern daß man schon mindestens beide Modelle zum "standard-linear-solid"-Modell (2.2.1) zusammenfassen muß, um dem wirklichen unelastischen Verhalten von Gesteinen näherzukommen, wie dieses sich in der Absorption und Dispersion von elastischen Wellen manifestiert. Da Meidav jedoch eine markante Dispersion und eine Absorption, die auf ein mehr oder weniger frequenzabhängiges Q führt, erhält, was beides nicht mit den Beobachtungsergebnissen in der Natur übereinstimmt, kann ein solches Modell nur für Betrachtungen in begrenzten Frequenzbereichen herangezogen werden; in begrenzten Frequenzbereichen

ergibt dies "standard-linear-solid"-Modell (nach Meidav) einen ungefähr linear frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten (2.1.56), was nach (2.1.61) frequenzunabhängiges Q bedeutet.

Thomson, K.E. [1967] untersucht Maxwell-Modelle und "linear-standard-solid"-Modelle hinsichtlich der komplexen elastischen Moduln, ohne allerdings Bezug auf die Eigenschaften von Gesteinen herzustellen (experimenteller Bezug zu einer gummiähnlichen Laborsubstanz).

Die in (2.2.11) und (2.2.14) berechneten Ausdrücke für Q sind - selbst wenn man noch höhere Ableitungen nach der Zeit in (2.2.1) hinzunimmt - also deutlich frequenzabhängig; in unserem Beispiel (2.2.1) ist diese Frequenzabhängigkeit vom Typ der Abb.5.

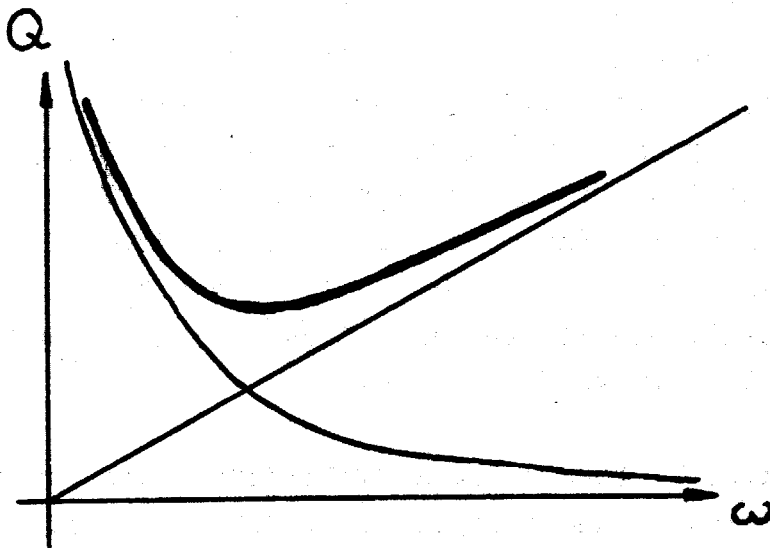


Abb. 5

Man beobachtet aber in der Natur an Erdbebenwellen und im Ultraschallbereich im Labor^{*)} frequenzunabhängige Q -Werte. Dies besagt, daß die natürlichen Dämpfungseigenschaften von Materialien nicht durch einfache rheologische Modelle beschrieben werden

^{*)} Dies soll polykristallines Material betreffen. Unter definierten kristallographischen bzw. werkstoffkundlichen Bedingungen des Probenmaterials lassen sich eher Modellvorstellungen entwickeln, z.B. Mason, W.P. [1958], Kap. VIII.

können. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit versucht man in der Überlagerung einfacher rheologischer Modelle mit verschiedenen Konstanten $\tau_1, \tau_2, \eta, \nu$ zu sehen, z.B. Mason, W.P. [1958], S. 191, S. 193. Sehr allgemein formuliert würde man die Ausdrücke für die komplexen elastischen Moduln, also (2.2.9) bzw. (2.2.10) und (2.2.12) bzw. (2.2.13) durch Integrale darstellen:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)_{\text{komplex}} &= \\
 &= \int_0^{\infty} G'(\tau_1 + 2\tau_2, \nu + 2\eta) \frac{(\lambda + 2\mu) + \omega^2 (\nu + 2\eta)(\tau_1 + 2\tau_2)}{1 + \omega^2 (\tau_1 + 2\tau_2)^2} d(\tau_1 + 2\tau_2) \cdot d(\nu + 2\eta) \\
 &+ i\omega \int_0^{\infty} G''(\tau_1 + 2\tau_2, \nu + 2\eta) \frac{(\nu + 2\eta) - (\lambda + 2\mu)(\tau_1 + 2\tau_2)}{1 + \omega^2 (\tau_1 + 2\tau_2)^2} d(\tau_1 + 2\tau_2) \cdot d(\nu + 2\eta)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.15}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{komplex}} &= \int_0^{\infty} H'(\tau_2, \eta) \frac{\mu + \omega^2 \cdot \eta \cdot 2\tau_2}{1 + \omega^2 \cdot (2\tau_2)^2} d\tau_2 d\eta \\
 &+ i\omega \int_0^{\infty} H''(\tau_2, \eta) \frac{\eta - \mu \cdot (2\tau_2)}{1 + \omega^2 (2\tau_2)^2} d\tau_2 d\eta
 \end{aligned}
 \tag{2.2.16}$$

Quotientenbildung gemäß (2.1.39) bzw. (2.1.42) aus Real- und Imaginärteil führt dann auf die entsprechenden Q-Faktoren; durch entsprechende Modellannahmen über die Gewichtsfunktionen G', G'' und H', H'' läßt sich dann ein Q erstellen, welches -

wie erwünscht - in weiten Frequenzbereichen von der Frequenz unabhängig (bzw. nur schwach abhängig) wird.

Die Formulierungen (2.2.15) und (2.2.16) sind Verallgemeinerungen der in der Literatur (z.B. Hall, I.H. [1968]; Kolsky, H. [1963]; Mason, W.P. [1958]) aufgezeigten Überlegungen. Die Funktionen G' , G'' und H' , H'' läßt man nur von einer Variablen abhängen, im Falle eines Maxwell-Körpers von der Relaxationszeit $(\tau_1 + 2\tau_2)$ bzw. $(2\tau_2)$, im Falle der Firmoviskosität von der Retardierungszeit $(\frac{\nu + 2\eta}{\lambda + 2\mu})$ bzw. $(\frac{\eta}{\mu})$. Dementsprechend nennt man die Funktionen G und H Relaxationszeit-Spektrum bzw. Retardierungszeit-Spektrum. Da man zeigen kann, daß Relaxationszeit-Spektrum und Retardierungszeit-Spektrum ineinander umrechenbar sind (daß also eine Summe von Maxwell-Modellen einer Summe von Firmoviskositäts-Modellen äquivalent ist)*, [Hall, I.H., 1968, S. 193], braucht man die Integrale (2.2.15) und (2.2.16) nur über eine Variable formulieren**).

Auf der Basis solcher Überlagerungen von Relaxations- und Retardierungsprozessen eines "standard-linear-solid"-Modells haben Liu, H.P., Anderson, D.L. und H. Kanamori [1976] ein Modell entwickelt, welches in sehr weiten Grenzen ein $Q = \text{const}$ liefert.

*) Dies entspricht in Verallgemeinerung, daß man einen Boltz'mannschen Ansatz (vgl. (4.2.1)) mit einer "Kriechfunktion" oder mit einer "Relaxationsfunktion" formulieren kann, wobei sich beide ineinander umrechnen lassen (Lomnitz, C. [1957], Formel (5)).

Ein anderer Ausweg, Modellvorstellungen zu entwickeln, die auf frequenzunabhängiges Q (" $Q = \text{const}$ ") führen, besteht in der Annahme nichtlinearer Absorptionsmodelle (zum Begriff "nicht-lineare Absorption" vgl. Kap. 2.1, S. 21 ff.). So zeigen quasistatische Belastungsproben oft durchaus Hysteresekurven mit Spitzen, also keinesfalls Ellipsen, z.B. White, J.E. [1965], S. 123; Stacey, F.D. et al. [1975]. (Neueste Labormessungen mit sehr kleinen Deformationsamplituden weisen dagegen wiederum mehr auf lineare Prozesse (elliptische Hysterese) hin [Brennan, B.J. und F.D. Stacey, 1977]. Die Frage nach Linearität oder Nichtlinearität der Absorption kann heute noch nicht eindeutig beantwortet werden.)

Spezielle Modellvorstellungen zur nichtlinearen Absorption entwickelten z.B. Loeb, J. [1961]; Förtsch, O. 1956].

Das Modell von Loeb

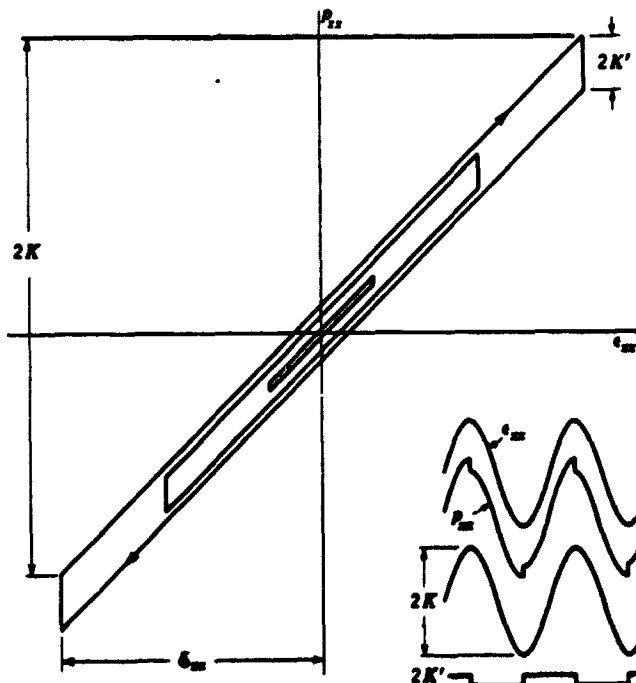


Abb. 6

Type of stress-strain cycle assumed by Loeb to describe a nonlinear solid. Inset shows the stress waveform if the strain is taken to be sinusoidal.

führt bei einer periodischen Deformation $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ auf eine Spannung σ , die aus dem in-Phase-Anteil der Amplitude k und einem um 90° phasenverschobenen Anteil, welcher eine Rechteckfunktion der Amplitude k' darstellt, besteht. In der Grundwelle bleibt von der Rechteckfunktion ein 90° phasenverschobener Teil der Amplitude $\frac{4k'}{\pi}$ *). Der Grundwellenanteil ist also

$$\begin{aligned}\sigma &= k e^{i\omega t} + i \frac{4k'}{\pi} e^{i\omega t} \\ &= k e^{i\omega t} \left(1 + i \frac{4k'}{\pi k} \right)\end{aligned}\quad (2.2.17)$$

Für $\frac{k'}{k} \ll 1$ kann man näherungsweise schreiben

$$\sigma \approx k \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i \frac{4k'}{\pi k}} = k e^{i(\omega t + \frac{4k'}{\pi k})} \quad (2.2.18)$$

und mit (2.1.40) bzw. (2.1.42) wird Q aus der Phasenverschiebung zwischen σ und ϵ :

$$Q = \frac{\pi k}{4 k'} \quad (2.2.19)$$

Hinsichtlich der Grundwelle ist in Loeb's Modell Q also frequenzunabhängig, konstant.

*) Eine Fourierreihe einer Rechteckfunktion der Amplitude a hat als Grundwelle die Amplitude $\frac{4a}{\pi}$.

Das Modell von Förtsch, O. [1956]^{*)}

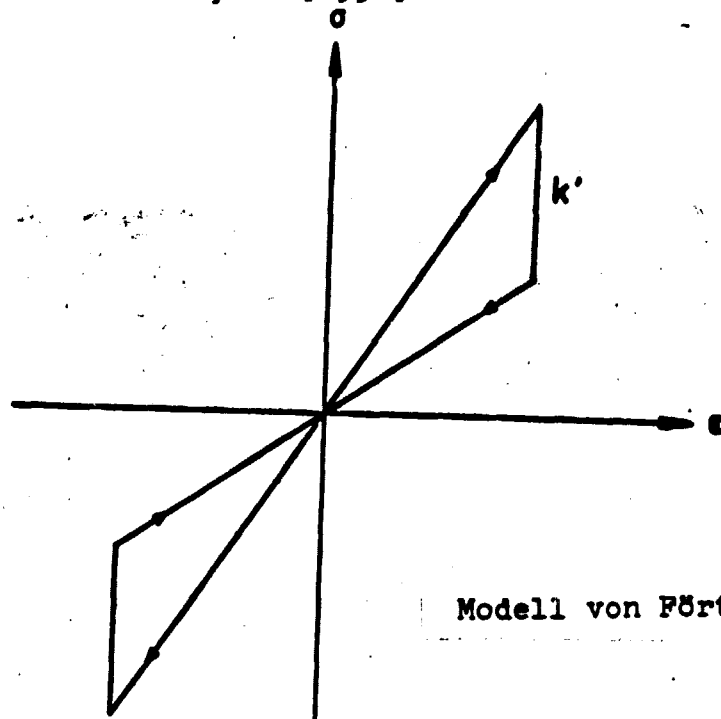


Abb. 7

läßt sich analog entwickeln; wenn k' klein ist gegen die auftretenden Maximalspannungen, wird auch hier Q von der Frequenz unabhängig: Es ist

$$K' = \chi \cdot \varepsilon \quad (2.2.20)$$

die Maximalenergie

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon \approx \frac{1}{2} N \cdot \varepsilon^2 \quad (2.2.21)$$

wobei N symbolisch für die elastischen Konstanten $\lambda + 2\mu$ bzw. μ stehen soll für die steilere der beiden σ - ε -Geraden, und schließlich ist pro Zyklus (für $k' \ll N \cdot \varepsilon_{\max}$):

$$\Delta W = 2 \cdot (\text{Dreiecksfläche}) \approx 2 \cdot \frac{k' \cdot \varepsilon}{2} = k' \cdot \varepsilon \quad (2.2.22)$$

^{*)} Das Modell von Förtsch ist übernommen aus White, J.E. [1965], S. 117/118; Förtsch selbst entwickelt seine Modellvorstellungen, ohne eine Darstellung der äquivalenten Hysteresekurve zu geben. Förtsch-Modell ist auch Grundlage der Diskussion von Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958] als nichtlinearer Absorptionsprozeß, der für kleine Amplituden linearisiert werden kann.

Aus (2.1.32) erhält man dann:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{\Delta W} = 2\pi \frac{N \cdot \varepsilon^2}{2k' \varepsilon} = \pi \cdot \frac{N}{k} = \text{const.} \quad (2.2.23)$$

Auch das Modell von Förtsch liefert also ein frequenzunabhängiges Q (vgl. auch Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958], S. 1192).

O'Brien, P.N.S. [1961] findet aus der Anwendung der Gedanken von Knopoff, L. und MacDonald [1958], die gezeigt haben, daß generell nur ein nichtlinearer Prozeß ein konstantes, also frequenzunabhängiges Q (wie man dies beobachtet) und gleichzeitig eine verschwindende oder verschwindend geringe Dispersion (wie dies die bislang vorliegenden - spärlichen - Messungen nahelegen) liefern kann, daß der Absorptionsmechanismus kein lineares Modell sein sollte, sondern nur ein nichtlineares Gesetz.

Die in diesem Kapitel (2.2) vorgestellten und diskutierten rheologischen Modelle sind als Beispiele gedacht. Die Literatur über die Rheologie von Gesteinen und der Zusammenhang zur Absorption seismischer Wellen ist sehr umfangreich, und darin dokumentiert sich auch unser Mangel an geeignetem Beobachtungsmaterial, welches hier differenzieren könnte. Beispielhaft sei auf die Arbeiten des Symposiums on Non-elastic Processes in the Mantle [1967], auf Stocker, R.L. und Ashby, M.F. [1973], auf Stacey, F.D. et al. [1975] und nicht zuletzt auch auf Knopoff, L. [1964] verwiesen.

2.3. Absorption seismischer Wellen in Flüssigkeiten

Das Verhalten von Flüssigkeiten wird bekanntlich mit dem Navier-Stokes'schen Gleichungen hinreichend gut beschrieben. Diese Navier-Stokes'schen Gleichungen ergeben sich, wenn man in die Bewegungsgleichung (2.1.6) statt des Hooke'schen Gesetzes ein Stoffgesetz vom firmoviskosen Typ (vgl. Kap. 2.2) annimmt und damit die innere Reibung ("Zähigkeit") der Flüssigkeit beschreibt, und wenn man die Scherfestigkeit des Materials verschwinden läßt ($\mu = 0$). Dieser spezielle Fall ist in den Betrachtungen des Kapitels 2.2 enthalten, so daß wir für Wellen, die ja eine periodische Deformation des Mediums erzeugen, die komplexen elastischen Moduln aus (2.2.10) bzw. (2.2.13) erhalten durch folgende Spezialisierungen:

$$\begin{aligned} \mu &= 0 && \text{Flüssigkeit (ohne Scherfestigkeit)} \\ \tau_1, \tau_2 &= 0 && \text{keine Maxwell'sche Spannungsrelaxation} \end{aligned}$$

$$(\lambda)_{\text{komplex}} = \lambda + i\omega(\nu + 2\eta) \quad (2.3.1)$$

$$(\mu)_{\text{komplex}} = i\omega\eta \quad (2.3.2)$$

Für die Q-Faktoren erhält man aus (2.2.11) und (2.2.14) unter diesen Annahmen:

$$Q_p = \frac{\lambda}{\omega(\nu + 2\eta)} \quad \text{bzw.} \quad a_p = \frac{\nu + 2\eta}{2\lambda c_p} \cdot \omega^2 \quad (2.3.3)$$

Dies Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis etwas vereinfachter Rechnungen bei Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958] (3.5), sowie Knopoff, L. [1964] (10), überein. Man muß jedoch an dieser Stelle daran erinnern, daß die Ausdrücke für Q, wie sie etwa in Kap. 2.2 hergeleitet wurden, auf (2.1.37) beruhen, und dieser Ausdruck gilt nur in der Näherung für schwache Absorption. Damit gilt (2.3.3) ebenfalls nur in der Näherung für schwache Absorption ($\lambda \gg \nu + 2\eta$). Dies wird besonders wichtig, wenn man Scherwellen betrachtet, denn man würde mit (2.2.14) $Q_s = 0$

erhalten, also unendlich große Absorption, und dies Ergebnis wäre ein Widerspruch zu der Voraussetzung einer "schwachen Absorption".

Zwar ist für uns in der Anwendung auf die Geophysik nur die schwache Absorption von Interesse, es soll aber für diesen Fall doch das grundsätzliche Ergebnis der allgemeinen Lösung vorgestellt werden. Entweder kann man zur Aufstellung des allgemeingültigen Ergebnisses statt (2.1.37) die allgemeine Formel für Q aufstellen und für (2.2.11) bzw. (2.2.14) anschreiben, oder man geht - und dies ist der einfachere Weg - von (2.1.47) und (2.1.54) aus (wobei man den auf S. 33 angeführten Definitionsunterschied hier im Sinne der sich ausbreitenden Welle versteht). Für die Kompressionswellen in Flüssigkeiten ($\mu = 0$) erhalten wir dann zunächst das komplexe k_p zu:

$$k_p = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

wobei ω_0 als Abkürzung dient für

$$\omega_0 = \frac{\lambda}{\nu + 2\eta}$$

Wir erhalten durch Ziehen der komplexen Wurzel dann Real- und Imaginärteil von k , wobei der Imaginärteil durch (2.1.54) mit (2.1.61) die Absorption und der Realteil durch (2.1.52) die Phasengeschwindigkeit angibt. Die Ergebnisse dieser Rechnung finden wir bei White, J.E. [1965], S. 111 oder bei Skudrzyk, E. [1954], S. 778; sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \cdot \left[\frac{2\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right]^{1/2} \\ a_r &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left[2\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \right]^{1/2}} \end{aligned} \right\} (2.3.4)$$

oder auf Q umgerechnet mit (2.1.61):

$$Q_p = \frac{\left[2 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right) \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right) \right]^2}{2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)} \quad (2.3.5)$$

In der Näherung für $\omega_0 \rightarrow \infty$ gehen diese Ausdrücke in (2.3.3) über.

Bemerkenswert ist indessen die analoge Behandlung der Scherwellen in Flüssigkeiten ($\mu = 0$): Wir bekommen nämlich aus (2.1.46) und (2.3.2) (vgl. Skudrzyk, E. [1954], S. 786):

$$k_s = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2\omega\eta}{\rho}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\eta}{\rho}}} \cdot \sqrt{-i} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\eta}{\rho}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1-i)$$

Damit zeigt sich zunächst, daß in Flüssigkeiten mit Scherviskosität (zur Definition vgl. (2.2.3)) Scherwellen existieren, denn k hat sowohl einen Real- als auch einen Imaginärteil; der Imaginärteil ist dem Betrage nach gleich groß wie der Realteil, daher ist der Fall "schwache Absorption" hier a priori nicht gegeben, und die Anwendung von (2.1.37) bzw. (2.2.14) mußte zu falschen Ergebnissen führen. Es wird für Scherwellen in Flüssigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} v_s &= \sqrt{\frac{2\omega\eta}{\rho}} \\ a_s &= \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

oder mit (2.1.61):

$$Q_s = \frac{1}{2}$$

Weil η eine sehr kleine Größe ist, ist v_s sehr klein, a_s sehr groß; so drückt sich trotz des zunächst keineswegs extrem erscheinenden Q -Wertes eine starke Absorption dieser Scherwellen aus, denn Q bedeutet die Abnahme der Wellenenergie pro Wellenlänge und letztere ist, wegen der geringen Ausbreitungsgeschwindigkeit v_s , sehr kurz.

Solche Scherwellen in Flüssigkeiten, wie sie auch bei Skudrzyk, E. [1954], S. 786, beschrieben werden, haben wohl kaum praktische Bedeutung^{*)}. Setzt man einmal für Wasser mit

$$\eta \approx 1 \text{ mPa} \cdot \text{s} \quad (20^\circ \text{C}) \quad \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad f = 10^4 \text{ Hz}$$

so ergibt die "Eindringtiefe" dieser Wellen:

$$d = \frac{1}{a_s} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,2 \text{ mm}$$

Bei Ölen kann die Viskosität aber durchaus größer als $10^3 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ sein, und das bedeutet z.B., daß Scherwellen auch durch mehrere mm dicke Klüfte, die flüssiggefüllt sind (ölhaltig) kaum behindert durchdringen.

Wir betrachten im folgenden in Flüssigkeiten allein die Kompressionswellen. In der Näherung für schwache Absorption wird die Phasengeschwindigkeit:

$$v_p \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \cdot \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \cdot \left[1 + \frac{3}{8} \omega^2 \cdot \left(\frac{v + 2\eta}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (2.3.7)$$

In der Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz erkennen wir, daß die Wellen in Flüssigkeiten - unter Annahme dieses rheologischen Modells - eine deutliche Dispersion zeigen.

^{*)} Beobachtungen von Scherwellen in viskosen Flüssigkeiten z.B. bei Thurston, G.B. [1966].

Bei Kompressionswellen tritt grundsätzlich noch ein weiterer Absorptionsmechanismus auf, der - wenn überhaupt - wegen seiner Kleinheit nur in Flüssigkeiten oder Gasen von Bedeutung sein wird: Infolge der endlichen Wärmeleitfähigkeit kommt es bei der adiabatischen Kompression und Dilatation beim Durchgang der Welle zu Wärmeausgleichsströmen, die einem Energieverlust der Welle entsprechen. Die lokale, durch die adiabatische Kompression und Dilatation der Welle erzeugte Temperaturveränderung verändert gemäß dem Duhamel-Neumann'schen Gesetz (Hooke'sches Gesetz mit Zusatzterm (2.1.14)) den lokalen, momentanen Spannungszustand und wirkt auch so auf die Wellenausbreitung ein. Dieses Problem findet man von Treitel, S. [1959] ausführlich abgehandelt.

In der Näherung für "schwache Absorption", d.h. daß die Eindringtiefe der Welle $1/a$ (gemäß 2.1.51) groß sei gegen die Wellenlänge λ , erhält Treitel für den Absorptionskoeffizienten aufgrund der Wärmeleitungsprozesse

$$a_p = \frac{1}{8} \frac{\kappa \cdot \omega^2}{c_p^3} \quad (2.3.8)$$

wobei κ die Temperaturleitfähigkeit und c_p die Kompressionswellengeschwindigkeit ist. Mit (2.1.61) wird der zugehörige Q-Faktor

$$Q_p = \frac{4 c_p^2}{\kappa \cdot \omega} \quad (2.3.9)$$

Bedenkt man, daß hinsichtlich der Absorption verschiedene Prozesse durch die Summe ihrer Absorptionskoeffizienten

$$a = a_1 + a_2 \quad (2.3.10)$$

zusammenzufassen sind, da ja die Summe der Energieverluste ΔW (in (2.1.60)) zu bilden ist, so hat man - gemäß (2.1.61) - die Summe aus $1/Q$ zu bilden, um den gesamten Qualitätsfaktor zu erhalten:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \quad (2.3.11)$$

Bei Flüssigkeiten (und Gasen) erhält man also, auch zusammengefaßt, einen Absorptionskoeffizienten proportional zu ω^2 bzw. $Q \sim \frac{1}{\omega}$, da sowohl der Absorptionsprozeß aufgrund der Viskosität, als auch der aufgrund der Wärmeleitung die gleiche, angegebene Frequenzabhängigkeit zeigen.

Die Tatsache, daß feste Stoffe, insbesondere (trockene) Gesteine, nach allen Beobachtungen, die bislang vorliegen, ein frequenzunabhängiges Q (also zur Frequenz proportionalen Absorptionskoeffizienten) haben, zeigt, daß weder das rheologische Modell der Firmoviskosität, welches ja die Kompressionswellen in viskosen Flüssigkeiten bestimmt, die Verhältnisse geeignet beschreibt, noch die Energieverluste durch Wärmeleitung wesentlich sind.

Darüber hinaus ist die Größenordnung beider hier diskutierter Effekte so wesentlich viel kleiner als die aus Messungen und seismischen Beobachtungen für feste Stoffe und Gesteine (vgl. Kap. 5 und 7) abgeschätzten Absorptionseffekte, daß nur bei Flüssigkeiten (und Gasen) diese Prozesse wesentlich werden können. Bei Flüssigkeiten errechnet man den durch Wärmeleitung gegebenen Absorptionskoeffizienten (2.3.8) um mehr als eine Größenordnung kleiner als den "viskosen" Absorptionskoeffizienten (2.3.3), dagegen ist bei Gasen die Größenordnung die gleiche. Vergleich mit Meßwerten der Absorption in Flüssigkeiten und Gasen zeigt, daß die Größenordnung der Berechnungen richtig ist; da jedoch Zahlenwerte über die Volumenkompressibilität ν nicht in den Tabellenwerken zugänglich sind, können die Rechnungen ohnehin nur zur Größenordnungsabschätzung dienen. Aufgrund der Meßwerte (z.B. nach Kohlrausch, F. [1968]) würde man für beide Prozesse zusammen folgende Q -Werte erwarten:

	10 Hz	100 Hz
	Q	Q
Wasser	$8 \cdot 10^9$	$8 \cdot 10^8$
Benzol	$2,5 \cdot 10^8$	$2,5 \cdot 10^7$
Glycerin	$6,7 \cdot 10^7$	$6,7 \cdot 10^6$

Dagegen liegen die Werte für Q im gleichen Frequenzbereich bei Gesteinen in der Größenordnung von $10 \dots 10^3$.

Die Verhältnisse werden anders, wenn man ein (poröses) Gestein mit Flüssigkeitsfüllung (Wasser, Öl) betrachtet. Die Gesteinsmatrix (trockenes Gestein) zeigt - wie offenbar alle Gesteine - ein von der Frequenz unabhängiges Q. Die Flüssigkeit in den Poren liefert - gemäß der Additionsregel (2.3.11) - einen zusätzlichen Absorptionsbeitrag; dieser Anteil erweist sich jedoch als wesentlich größer als die Absorption in der reinen Flüssigkeit. Vermutlich spielen hier Strömungsvorgänge der Flüssigkeit im Porenvolumen die entscheidende Rolle; da diese aber ebenfalls durch die Navier-Stokes'schen Gleichungen beschrieben würden, also durch eine Rheologie vom firmoviskosen Typ (2.2.1-3), verwundert es nicht, daß die Frequenzabhängigkeit der Absorption genauso wie in (2.3.3) beobachtet wird. Entsprechende Messungen an einem Sandstein, einmal trocken, zum anderen mit verschiedenem Wassergehalt der Poren, hat Born, W.T. [1941] vorgestellt (vgl. auch Knopoff, L. [1964]). Eingehende theoretische Untersuchungen zu diesem Problem - auf der Grundlage des Strömungsverhaltens einer Flüssigkeit in den Poren einer Gesteinsmatrix - haben Mavko, G.M. und A. Nur [1979] veröffentlicht.

3. Dämpfung seismischer Wellen durch Streuung

Wenn man in der Natur Dämpfung seismischer Wellen beobachtet, so enthält diese neben der Absorption durch unelastisches Materialverhalten auch die Energieverluste der Welle infolge von Streuung. Zwar kann man die Streuung nicht direkt durch komplexe elastische Moduln und elastische Hysterese beschreiben, im Bilde der Wellenausbreitung (2.1.48), (2.1.50) läßt sich die Dämpfung durch Streuung aber doch durch einen Dämpfungskoeffizienten α und mit (2.1.61) durch ein entsprechendes Q beschreiben.

Nach den Betrachtungen zur Absorption wollen wir uns nun der Schwächung seismischer Wellen durch Streuung an Inhomogenitäten und Klüften zuwenden. All jenes seismische Signal, welches man in der Zeit zwischen zwei Einsätzen, die Reflexionen an im Untergrund vorhandenen Diskontinuitätsflächen zuzuordnen sind, beobachtet, rührt von Streuung her. Es ist das, was Hudson, J.A. und L. Knopoff [1966] sehr treffend als "signal generated seismic noise" bezeichnen. Eine geschlossene, vollständige Theorie der Streuung seismischer Wellen fehlt bislang, es werden immer nur Verhältnisse unter bestimmten Bedingungen betrachtet. Dies liegt einmal an der Schwierigkeit quantitativer Messungen: Streuung kann längs des ganzen Laufweges der Welle, insbesondere in der oberen Erdkruste, auftreten. Es gibt also kein begrenztes Volumen, innerhalb dessen die Streuung auftritt und welches man als "Streuzentrum" auffassen kann. Dementsprechend trifft am festen Meßort, etwa bei reflexionsseismischer Anordnung, Streusignal ein, welches unter allen möglichen Richtungen gestreut wurde. Ein Richtungsdiagramm der Streuamplitude kann man daher nicht pauschal aus den Streusignalen erhalten, die man in verschiedenen Abständen vom Schußpunkt mißt. Man muß statt dessen den zeitlichen Ablauf der reflexionsseismischen Registrierung betrachten; unter der Annahme, daß die seismische Energie in einem Impuls begrenzter Länge konzentriert ist, bekommt man zu verschiedenen Zeiten die Streusignale aus verschiedener Tiefe. Dies über verschiedene seismische Spuren beobachtet, könnte dann auf das Richtungsdiagramm

der Streuung in verschiedener Tiefe führen. Bei den üblichen Meßanordnungen läßt sich ein wesentlicher Winkelbereich für die interessierenden Tiefen jedoch gar nicht überstreichen, da die Auslagenlänge im Vergleich zur Tiefe zu klein ist.

Die Schwierigkeiten einer Theorie der Streuung seismischer Wellen haben einen Grund insbesondere auch in den mathematischen Schwierigkeiten:

Im Gegensatz zur Streutheorie der Optik oder bei Teilchenwellen in der Quantentheorie hat man hier stets zwei Wellentypen gleichzeitig zu behandeln, die transversalen und die longitudinalen Wellen. An Inhomogenitäten (Grenzflächen) wandeln sich die Wellen je nach Einfallswinkel, Einfallsebene und Kontrast der akustischen Impedanz $\rho \cdot c$ in ihrem Typus gegeneinander um.

Jeffreys, H. [1970] (S. 45/46) entwickelt aus Analogiebetrachtungen zur kinetischen Gastheorie eine Abschätzung der Streuung durch ein äquivalentes firmoviskoses Verhalten; und zwar soll für Scherwellen gelten:

$$" \tau "_{\text{Jeffreys}} = \mu \cdot \eta \approx \frac{L}{3 c_p \cdot \epsilon} \quad (3.1)$$

wobei η die äquivalente Viskosität, μ der Lamé'sche Modul für Scherdeformation, L die Dimension der streuenden Inhomogenität, c_p die Longitudinalwellengeschwindigkeit und ϵ der Faktor, um den die Wellengeschwindigkeit der Inhomogenität anders als die der Umgebung ist. Die gleiche Beziehung soll auch zur Abschätzung der Streuung von Longitudinalwellen gelten. Benutzt man (wie in Kap. 2.3) (2.2.14) bzw. (2.2.11) zur Abschätzung des Q-Faktors bzw. des Dämpfungskoeffizienten a

$$(Q_S)_{\text{Jeffreys}} \approx \frac{1}{\omega} \cdot \frac{3 \mu^2 c_p \cdot \epsilon}{L} \quad (3.2a)$$

$$(a_S)_{\text{Jeffreys}} \approx \frac{L}{6 \mu^2 c_p \cdot c_s \cdot \epsilon} \cdot \omega^2 \quad (3.2.b)$$

Leider findet sich bei Jeffreys kein Hinweis auf die genauere Rechnung (sofern eine solche überhaupt zugrunde liegt), so daß auch die Aussage über einen Gültigkeitsbereich (Wellenlänge im Vergleich zur Inhomogenitätsdimension) fehlt. Aus der Dämpfung der Oberflächenwellen von Erdbeben, die Jeffreys gänzlich der Streuung zuschlägt, schätzt er eine typische Inhomogenitätsdimension von $L = 4,50 \text{ m}$ ab.

Man kann versuchen, die Streuung seismischer Wellen durch eine Ähnlichkeitsüberlegung aus den Messungen und Überlegungen zur Streuung von Schall- bzw. Ultraschallwellen in polykristallinen Laborproben abzuschätzen. Faßt man die Ergebnisse von Messungen nach Merkulova, V.M. [1966] und der von Papadakis, E.P. [1968] angegebenen (quantitativen) theoretischen Ausdrücke zusammen, so kommt man zu folgender Aussage: Sei λ die Wellenlänge und L eine mittlere Dimension der streuenden Inhomogenitäten, so gilt für

$$\lambda \gg 2\pi \cdot L : \quad a \sim L^3 \cdot \omega^4 \quad (3.3)$$

Dies ist ein Streuprozess vom Rayleigh-Typ (inkohärente^{*)} Streuung). Weiter gilt für

$$\lambda \approx 2\pi \cdot L : \quad a \sim L \cdot \omega^2 \quad (3.4)$$

Einen solchen quadratischen Zusammenhang mit der Frequenz findet Merkulova im Experiment über einen sehr weiten Frequenzbereich (Wellenlängenbereich), und er schließt in Analogie zur elektromagnetischen Streuung hier auf einen kohärenten^{*)} Streuprozess. Schließlich steht zu erwarten, daß für

$$\lambda \ll 2\pi \cdot L : \quad a \sim \frac{1}{L} \cdot \omega^0 \quad (3.5)$$

^{*)} inkohärent soll bedeuten, daß die von einer einzelnen Inhomogenität gestreute Welle zwar noch in Phasenbeziehung (Kohärenz) zur einfallenden Welle steht, daß aber die verschiedenen gestreuten Wellen inkohärent zueinander sind.

wird; keine Frequenzabhängigkeit, da in diesem Fall die Inhomogenität als ausgedehnte Grenzfläche erscheint und damit der in guter Näherung (vgl. Kap. 6) frequenzunabhängige Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizient ins Spiel kommt. Die Dämpfung in diesem Falle kann man als "Abschattungseffekte" durch unvollkommene Transmission verstehen.

Die Angaben für a nach (3.3), (3.4) und (3.5) gelten in der aufgezeigten Form sowohl für Transversalwellen wie für Longitudinalwellen. Zur quantitativen Unterscheidung, siehe Papadakis, E.P. [1968]; zur Übertragung dieser für die modellseismischen Ultraschallversuche relevanten Streukoeffizienten auf die seismischen Frequenzen sind die Bestimmungen der quantitativen Werte ohnehin nicht brauchbar, da die Inhomogenitäten im Ultraschallbereich irregulär gelagerte Kristallite definierter Struktur sind, in der Seismik jedoch Inhomogenitäten allein hinsichtlich der akustischen Impedanz $\rho \cdot c$. Man kann lediglich davon ausgehen, daß die Streuprozesse ihrem Typus nach übertragbar sind; es ist interessant zu bemerken, daß (3.4) mit dem Modell nach Jeffreys (3.2b) in Einklang steht.

Da man bei Messungen (hier: im Ultraschallbereich) stets nur den gesamten Extinctionskoeffizienten bestimmen kann, der sich gemäß (2.3.10) aus dem Absorptions- und dem Streu-Anteil zusammensetzt, können die Messungen auch Hinweise auf den Absorptionskoeffizienten geben. Sowohl Merkulova, V.M. [1966] als auch Papadakis, E.P. [1968] finden, daß der Absorptionskoeffizient auch im Ultraschallbereich zu ω proportional ist, also $Q = \text{const}$ ist, wie es auch für die Seismik (bei Frequenzen, die 5 - 6 Größenordnungen niedriger sind) zutrifft. Dies steht im Einklang mit eigenen Auswertungen modellseismischer Messungen (vgl. Kap. 7.2, Abb. 28).

Die quantitative Berechnung der Streuung seismischer Wellen beschränkt sich bisher auf spezielle elastische Bedingungen, mindestens aber auf spezielle Geometrien, da die rechnerischen Schwierigkeiten wegen des gleichzeitigen Auftretens von

Longitudinal- und Scherwellen erheblich sind. Der grundsätzliche Rechengang ist jedoch einfach: Man formuliert die einfallende, ebene Welle durch ihren Verschiebungsvektor \vec{u}_1 , die je nach dem in Betracht stehenden Fall als Transversalwelle oder als Longitudinalwelle angesetzt wird. Dazu bringt man einen geeigneten allgemeinen Ansatz für den Verschiebungsvektor \vec{u}_g sowohl innerhalb als auch außerhalb der Inhomogenität; für eine kugelförmige Inhomogenität würde der Ansatz auf einer Kugelfunktionsentwicklung aufbauen [Schwab, F., 1965]. Durch die Randbedingungen für den Rand der Inhomogenität (vgl. Kap. 6, Formeln (6.6) bis (6.9)), nämlich, daß (1): das Vektorfeld der Verschiebung kontinuierlich sein muß (die beiden Grenzflächen sind in Kontakt, ohne daß Risse oder Hohlräume entstehen) und daß (2): die Spannungen kontinuierlich sind (die Grenzfläche ist nicht Quelle irgendwelcher Flächenkräfte), wird \vec{u}_g mit der einfallenden Welle verknüpft. Man erhält dann die gestreute Welle in Form ihres Verschiebungsvektors \vec{u}_g als Funktion der Entfernung zur Inhomogenität, des Winkels zur einfallenden Welle, der Kontraste von Dichte und elastischen Moduln und der Wellenlänge (bzw. der Frequenz) in Maßeinheit der Größe der Inhomogenität. Um den Extinctionskoeffizienten α zu gewinnen, muß man aus dem Verschiebungsvektorfeld der gestreuten Welle die Energiedichte $W \sim \vec{u}^2$ (Intensität) ausrechnen, über alle Streurichtungen und über eine Periode integrieren; man erhält dann den Energieverlust der einfallenden Welle ΔW , den man zur noch vorhandenen Energie der einfallenden Welle in Beziehung setzen kann, um gemäß (2.1.60) und (2.1.61) den Extinctionskoeffizienten zu erhalten. Die Ausdrücke für die gestreute Welle werden in allgemeinerer Formulierung sehr unübersichtlich, und man betrachtet im allgemeinen dann den Fall, daß die Größendimension L der streuenden Inhomogenität klein gegen die Wellenlänge sei (Rayleigh-Fall).

Diese hier aufgezeigte Rechenmethode zur Streutheorie ist die konsequente Verallgemeinerung der Streutheorie für akustische Probleme, deren Lösung für zylinderförmige und kugelförmige Streukörper in der Literatur zu finden ist. Die direkte Übertragung auf seismische Probleme ist eben deshalb nicht möglich, weil in der Akustik nur Longitudinalwellen im Spiel sind; dies

kommt in entsprechend einfacheren Randbedingungen bei der Akustik zum Ausdruck: z.B. daß die Normalgeschwindigkeit an der Grenzfläche verschwinden soll, d.h. Streuung am starren Körper (vgl. z.B. Morse, Ph.M. [1948], S. 346 ff.) - dies entspricht der unten diskutierten Streutheorie von Knopoff, L. [1959a,b] für seismische Wellen - oder, in einer allgemeineren Formulierung mit nichtstarrem Streukörper, daß der Druck und die Normalgeschwindigkeit an der Grenzfläche stetig sein sollen (z.B. Morse, Ph.M. und H. Feshbach [1953], S. 1486 ff.).

Schwab, F. [1965] hat den Fall der Streuung einer Scherwelle an einem kugelförmigen Objekt mit beliebigem Dichte- und beliebigem Lamémoduln-Kontrast berechnet. Sein Formalismus lehnt sich eng an die Streutheorie elektromagnetischer (transversaler!) Wellen an (in der Darstellung nach Stratton, J.A. [1941], Sec. 7.11), wenngleich sie natürlich allgemeiner sein muß, da neben transversalen auch longitudinale gestreute Wellen auftreten. Das gestreute Wellenfeld läßt sich nach verschiedenen Typen klassifizieren, nämlich SV-, SH- und P-Wellen. Jeder dieses Wellentypus hat ein anderes Streudiagramm (Wellenamplitude als Funktion des Streuwinkels im Polardiagramm). Dies hatte bereits die Rechnung von Knopoff, L. [1959b] für Streuung von Scherwellen an einer kugelförmigen Inhomogenität von unendlicher Dichte und Scherfestigkeit gezeigt; die allgemeinere Rechnung Schwab's zeigt aber - im Gegensatz zur Arbeit von Knopoff - für den Fall einer kleinen Inhomogenität im Vergleich zur Wellenlänge ($L \ll \lambda$) das zu erwartende typische Rayleigh-Verhalten, daß nämlich die Wellenfeldamplitude $\vec{u} \sim 1/\lambda^2$ ist, die Energiedichte also wie $(1)^{-4}$ geht.

Knopoff, L. [1959a] hat auch die Streuung von Longitudinalwellen an einer kugelförmigen Inhomogenität (unendlicher Dichte und Festigkeit) untersucht; auch hier ergeben sich unterschiedliche Streudiagramme für die gestreute S- bzw. P-Welle, wenngleich die allgemeine Anwendbarkeit der Ergebnisse Knopoff's - wie auch bei seinen Rechnungen zur Scherwellenstreuung [Knopoff, L., 1959b] - mit Vorsicht beurteilt werden muß, denn in der Näherung für kleine Objektdimension ($L \ll \lambda$) zeigt sich nicht das erwartete Rayleigh-Verhalten.

Das elastische Streuproblem läßt sich auch von einem anderen Gedanken ausgehend behandeln: Miles, J.W. [1960] betrachtet die streuende Inhomogenität als Störung des elastischen Mediums, und er entwickelt eine Theorie der Streuung für Longitudinal- und Scherwellen im Sinne einer Störungstheorie (er betrachtet also kleine Abweichungen der Lamé'schen Moduln und der Dichte im Streuvolumen gegenüber der Umgebung - was in der Natur häufig der realistische Fall sein wird - im Gegensatz zu den oben erwähnten Inhomogenitätskontrasten, die Knopoff, L. [1959a] und [1959b] annimmt); spezielle Annahmen über die geometrische Gestalt der Inhomogenität macht er nicht. Im Falle der kleinen Inhomogenität im Vergleich zur Wellenlänge findet man für das gestreute Wellenfeld sowohl bei einfallenden Longitudinalwellen als auch bei Scherwellen die für die Rayleigh-Streuung charakteristische Wellenlängenabhängigkeit; Schwab, F. [1965] konnte auch zeigen, daß die Streutheorie von Miles, angewandt auf kugelförmige Inhomogenitäten, in seine eigene Streutheorie für Scherwellen bei beliebigem Inhomogenitätskontrast übergeht.

Auf der Basis einer solchen Theorie der Streuung einer ebenen, elastischen Welle an einer kugelförmigen Inhomogenität (in der durch Yamakawa, N. [1962] gegebenen Formulierung) baut Dunkin, J.W. [1969] eine statistische Streutheorie auf, die direkt auf die reflexionsseismische Messung des unkorrelierten Signals zwischen den Einsätzen anwendbar sein soll: Eine von der Erdoberfläche ausgehende longitudinale Kugelwelle werde an im Untergrund statistisch verteilten, kugelförmigen Inhomogenitäten, deren Dimension klein gegen die Wellenlänge sei (Rayleigh-Fall) gestreut. Entsprechend der statistischen Behandlung des Problems beziehen sich die Ergebnisse auf die (statistische) Korrelationsfunktion des gestreuten Wellenfeldes an zwei verschiedenen Aufnahmeorten. In eine solche Korrelationsfunktion geht nun auch das Streudiagramm ein; die gestreute Longitudinalwelle zeigt eine vorwiegende Rückwärtsstreuung, während die aus der einfallenden Longitudinalwelle als Scherwelle gestreute Welle Streumaxima unter 45° gegen die Einfallsrichtung zeigt. - Der gedankliche Vorläufer zur Theorie von Dunkin sind die

Arbeiten von Hudson und Knopoff [Hudson, J.A. und Knopoff, L., 1966; Knopoff, L. und J.A. Hudson, 1964].

Diese "statistischen Streutheorien" bauen sich ähnlich wie die Theorie der Streuung von Teilchen in der Quantentheorie auf. Statt Annahmen über die geometrische Gestalt der Streukörper werden Voraussetzungen über deren statistische Eigenschaften (Korrelationsfunktionen) gemacht. Berechnet wird die mittlere quadratische Amplitude der gestreuten Wellen vom P- und vom S-Typ. Bemerkenswert ist schließlich das Ergebnis hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit: Für kleine Abmessungen der Streuobjekte im Vergleich zur Wellenlänge (d.h. kleine Korrelationslängen) folgt die mittlere quadratische Streuamplitude einem ω^4 -Gesetz, welches den Rayleighstrentyp (wie in (3.3)) anzeigt. Ist die Wellenlänge jedoch kleiner oder sehr klein gegen die Korrelationslänge, so folgt die Streuung - nach Hudson und Knopoff - einem ω^2 -Gesetz; dies würde gut mit den oben erwähnten Ultraschallmessungen von Merkulova, V.M. [1966] zusammenpassen.

Es bleibt aber grundsätzlich fraglich, inwieweit diese bisher diskutierten Annahmen zur Streuung elastischer Wellen in der Natur überhaupt angenähert realisiert sind. Alle genannten Autoren gehen letztlich davon aus, daß die streuende Inhomogenität eine dreidimensional erstreckte Struktur ist und unter dieser Annahme ist die Rechnung mit kugelförmigen Inhomogenitäten - insbesondere in der Rayleigh-Näherung, daß die Inhomogenitätsdimension klein gegen die Wellenlänge sei - sicherlich ein guter Ansatz. Abgesehen vielleicht von den Inhomogenitäten in der Verwitterungsschicht finden wir in der Natur jedoch eigentlich keine dreidimensionalen Streustrukturen, sondern wir haben es vorwiegend mit zweidimensionalen Streustrukturen zu tun: Ein an sich großes homogenes Volumen ("Schichtpaket") ist von Spalten und Klüften durchzogen, die im übrigen nicht statistisch orientiert sind, sondern Vorzugsrichtungen aufweisen; ein Befund, der an geologischen Aufschlüssen sich meist deutlich markiert. Nimmt man die in der Prospektionsseismik

typischen Wellenlängen von $\lambda \approx 10 \text{ m} \dots 100 \text{ m}$ als Größenordnung, so mögen diese Klüfte (oder gar Verwerfungsflächen) durchaus flächenhafte Dimensionen vergleichbar mit der Wellenlänge haben, während ihre Dicke jedoch außerordentlich klein ist, im Vergleich zur Wellenlänge. Offenbar darf man hieraus jedoch nicht schließen, daß die "dünnen" Klüfte für die Streuung ohne Bedeutung seien. Im Zusammenhang mit akustischen Messungen an hydraulisch erzeugten Fracture-Systemen haben nämlich Aki, K. und Fehler, M. [1978] das Verhalten elastischer Wellen an sehr dünnen, flächenhaften Inhomogenitäten untersucht, insbesondere an wassergefüllten Klüften ("crack"). So ergibt sich, daß eine Flüssigkeitsschicht von nur 0,1 mm Dicke Scherwellen vom SH-Typ (d.h. Polarisationsrichtung liegt in der Inhomogenitätsfläche) mit einer Wellenlänge, die mehr als 10^4 mal größer als die Dicke der Flüssigkeits-"lamelle" ist, unter praktisch allen Winkeln vollständig reflektiert^{*)}. Aki und Fehler haben auch die Reflexion und Transmission einfallender Longitudinalwellen und Scherwellen vom SV-Typ (d.h. Polarisationsrichtung steht senkrecht auf der Inhomogenitätsfläche) in Abhängigkeit von der Einfallsrichtung und für verschiedene Wellenlängen (diese im Bereich größer als 10^4 mal Inhomogenitätsdicke) berechnet. Auch hier zeigen die reflektierten Wellen (die als die gestreuten Wellen anzusehen sind) durchaus Amplituden der gleichen Größenordnung wie die der einfallenden Welle. - Man muß also bei der Streuung seismischer Wellen durchaus sehr dünne Klüfte und Lamellen in Betracht ziehen. Bei parallel-geschichteten Inhomogenitätslamellen sind einerseits

^{*)} Dabei haben die Autoren allerdings die Flüssigkeit durch die Eigenschaft $\mu = 0$ charakterisiert, ohne die Viskosität zu beachten. Vergleichen wir mit den Abschätzungen in Kap. 2.3, so ist durchaus denkbar, daß sich bei solch dünnen Flüssigkeits-"lamellen" Unterschiede ergeben, wenn man Scherwellen auch in die (viskose) Flüssigkeit eindringen läßt, d.h. den Reflexionskoeffizienten zusätzlich zum Impedanzkontrast $\rho \cdot c$ mit Viskositätskontrast ausstattet und die Absorption hinzunimmt.

interne multiple Reflexionen ("Mehrfachstreuung") von zusätzlicher Bedeutung [Aki, K. und M. Fehler, 1978, S. 122] und ebenso die vielfachen Interferenzen der an den einzelnen Lamellen transmittierten und reflektierten Wellen, was zu Veränderungen des Impulsspektrums und damit auch der Impulsform (waveletform) führt (vgl. S. 146 ff. und Kap. 7.2).

Streuung seismischer Wellen an dünnen, lamellenförmigen Inhomogenitäten ("Schlitze") wurde auch für die Interpretation von Mondseismogrammen herangezogen [Berckhemer, H., 1970].

4. Dispersionsrelationen

An den Beispielen zur Absorption in Kap. 2.2 und Kap. 2.3 haben wir bereits bemerkt, daß als Folge der frequenzabhängigen komplexen elastischen Moduln nicht nur der Absorptionskoeffizient α eine bestimmte Frequenzabhängigkeit zeigt (in der Natur wird $\alpha \sim \omega$ beobachtet), sondern daß damit auch die Phasengeschwindigkeit der Wellen frequenzabhängig wird: wir haben Dispersion.

Im folgenden Kapitel 4 (4.1) wird nun gezeigt, daß ein Zusammenhang zwischen der Frequenzabhängigkeit der Absorption und der der Phasengeschwindigkeit als ganz allgemeines Naturprinzip gilt. In Kap. 4.2 wird dies dann speziell für die seismischen Wellen formuliert.

Es ist allein die Bedingung der Kausalität für einen physikalischen Vorgang (z.B. den der Ausbreitung elastischer Wellen), die zu derartigen Beziehungen der Absorption und der Dispersion (also der Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit) von Wellen führt. Diese Beziehungen nennt man Dispersions-Relationen oder Kronig-Kramers-Relationen, nach der ersten Anwendung dieser Relationen auf optische Phänomene durch Kronig, R. de L. [1926] und Kramers, H.A. [1927]; als erster hat wohl Sellmeier, E. [1871] auf die Tatsache eines grundlegenden Zusammenhanges zwischen der optischen Dispersion und der Absorption hingewiesen. Dispersionsrelationen haben außer in der Optik in der neueren Physik besondere Bedeutung bei den quantentheoretischen Streuprozessen und in der Elementarteilchenphysik erlangt. Eine Übersicht findet man in der zu Beginn des Abschnittes 4.1 aufgeführten Literatur.

4.1. Allgemeine Aufstellung der Dispersionsrelationen und das Beispiel des komplexen Brechungsindex' der Optik

Es soll an dieser Stelle nicht versucht werden, eine umfassende, gut blossene und mathematisch strenge Herleitung der Dispersionsrelationen zu geben. Dafür sei auf die zahlreichen Darstellungen verwiesen, wie sie etwa von Toll, J.S. [1956], Corinaldesi, E. [1959], De Witt, C. und R. Omnes [1960], Hilgevoord, J. [1962], Hagedorn, R. [1963], Holbrow, C.H. und Davidson, W.C. [1964], Nussenzweig, H.M. [1972] gegeben werden. Die im folgenden gegebene Begründung soll nur den Sinn haben, die Dispersionsrelationen und deren Hintergrund für die Anwendung auf seismische Probleme bereitzustellen.

Sei $\phi(t)$ die Antwort ("output") eines linearen physikalischen Systems auf eine Erregung ("input") $\psi(t)$, so kann der allgemeinste Zusammenhang zwischen ϕ und ψ dargestellt werden durch ein Faltungsintegral

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, t') \cdot \psi(t') dt' \quad (4.1.1)$$

Bei dieser Beziehung wird vorausgesetzt, daß die Antwort-Eigenschaften des Mediums (z.B. auf einen Einheitsimpuls) nicht explizit von der Zeit abhängen (d.h. daß sich die physikalischen Eigenschaften des Mediums nicht im Verlauf der Zeit verändern), daß damit der Kern der Integraltransformation nur von der Zeitdifferenz $t-t'$ zwischen Antwort und Erregung abhängt (Invarianz gegenüber der Zeit), formal, daß gilt:

$$k(t, t') = k(t - t') \quad (4.1.2)$$

Der Integralkern $k(t-t')$ stellt die Impulsantwortfunktion unseres Problems dar; er ist die Antwort des Systems auf eine Erregung durch den Einheitsimpuls $\delta(t')$. Die Voraussetzung der Linearität ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit des (linearen) Superpositionsprinzips, welches in (4.1.1) zum Ausdruck kommt.

Für physikalisch realisierbare Prozesse kommt zu (4.1.1) die Nebenbedingung der Kausalität hinzu: Diese besagt, daß keine Antwort $\phi(t)$ zeitlich vor der entsprechenden Erregung $\psi(t')$ liegen darf. Formal kommt dies durch die Forderung

$$K(t-t') = 0 \quad \text{für } t < t' \quad (4.1.3)$$

zum Ausdruck, oder, wenn man

$$\tau = t - t'$$

setzt, durch

$$K(\tau) = 0 \quad \text{für } \tau < 0 \quad (4.1.4)$$

Die obere Grenze des Integrals (4.1.1), also $+\infty$, kann man deshalb durch t ersetzen.

Überträgt man die Gleichung (4.1.1) in den Fourierraum durch eine Fouriertransformation, die, wie folgt, definiert sein soll:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad *) \quad (4.1.5)$$

mit der Umkehrung

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-i\omega t} dt \quad *) \quad (4.1.6)$$

*) Wird die Fouriertransformation anders definiert, nämlich, daß im Exponenten * mit dem anderen Vorzeichen versehen ist, so hat man gegenüber der Rechnung hier zu ersetzen

$$\phi_R(\omega) \text{ durch } \phi_R(\omega)$$

$$\phi_I(\omega) \text{ durch } -\phi_I(\omega)$$

Dies ist besonders bei Vergleich mit Formulierungen in der Literatur zu beachten.

sowie entsprechend für $K(\tau)$ und $\psi(t')$, so wird das Faltungsintegral ein Produkt der Fourierkomponenten:

$$\Phi(\omega) = K(\omega) \cdot \psi(\omega) \quad (4.1.7)$$

Die komplexen Größen $\Phi(\omega)$, $K(\omega)$, $\psi(\omega)$ sind die Fouriertransformierten der reellen Funktionen $\phi(t)$, $K(\tau)$, $\psi(t')$. Damit diese Funktionen im Zeitbereich reell sind, muß für die Fouriertransformierten bekanntlich folgende Beziehung gelten:

$$\Phi(-\omega) = \Phi^*(\omega) \quad (4.1.8)$$

und entsprechend für $K(\omega)$ und $\psi(\omega)$. Nach Real- und Imaginärteil aufgespalten

$$\Phi(\omega) = \Phi_R(\omega) + i \Phi_I(\omega)$$

bedeutet (4.1.8) im einzelnen:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_R(-\omega) &= \Phi_R(\omega) \\ \Phi_I(-\omega) &= -\Phi_I(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.9)$$

und sinngemäß für $K(\omega)$ und $\psi(\omega)$.

Wir betrachten nun die Fourierdarstellung des Integralkerns

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.1.10)$$

und setzen die Variable ω analytisch fort:

$$\omega \longrightarrow \bar{\omega} = \omega + i\omega' \quad (4.1.11)$$

Damit wird $K(\omega)$ in die komplexe $\bar{\omega}$ -Ebene fortgesetzt:

$$K(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} \cdot e^{\omega'\tau} d\tau \quad (4.1.12)$$

Dasjenige $K(\omega)$, das wir für die Fouriertransformation (4.1.5) bzw. für (4.1.7) meinen, ist dann durch

$$K(\omega, \omega' \rightarrow 0) \quad (4.1.13)$$

zu erhalten.

$K(\bar{\omega})$, gemäß (4.1.12), ist analytisch in der gesamten unteren Halbebene ($\omega' < 0$), weil wegen der Kausalitätsbedingung (4.1.4) nur Anteile mit $\tau \geq 0$ zum Integral beitragen. In der oberen Halbebene ($\omega' > 0$) divergiert das Integral, weil der Faktor $e^{\omega'\tau}$ für $\tau > 0$ für $\omega' \rightarrow +\infty$ selbst unendlich wird.

In der unteren Halbebene ist daher auf $K(\bar{\omega})$ der Cauchy'sche Integralsatz anwendbar. Er besagt ja, daß für eine analytische Funktion der komplexen Variablen z , $f(z)$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (4.1.14)$$

für jede beliebige geschlossene Kurve \mathcal{L} , die den komplexen Punkt $z = z_0$ einschließt.

$K(\bar{\omega})$ muß daher darstellbar sein durch

$$K(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{k(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \bar{\omega}} d\bar{\omega} \quad (4.1.15)$$

mit beliebiger Führung der Kurve \mathcal{L} unter Einschluß der Polstelle $\bar{\omega} = \bar{\omega}$. Die Beziehung (4.1.15) gilt für jedes $\bar{\omega}$, also auch für ein solches mit $\omega' = 0$ (reelle Achse). Dann geht (4.1.15) über in

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} \quad (4.1.16)$$

Der Pol $\hat{\omega} = \omega$ liegt irgendwo auf der reellen Achse, und $K(\omega)$ ist nun genau jene Fouriertransformierte der nun reellen Variablen ω , die auch in (4.1.10) und (4.1.7) gemeint ist.

Zur Darstellung von $K(\omega)$ durch ein Integral der Form (4.1.16) haben wir nun noch die Wahl der Führung der geschlossenen Kurve \mathcal{L} frei. Diesen Integrationsweg \mathcal{L} wählen wir so, daß die reelle Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ ein Teil von ihm ist (vgl. Abb. 8). $\hat{\omega}$ hat längs dieses Weges nur einen Realteil; da der Pol $\hat{\omega} = \omega$ auf dem Weg selbst liegt aber in das von \mathcal{L} umschlossene Gebiet gehören soll, muß er - wie in der Abb. 8 gezeigt - durch einen infinitesimal kleinen Halbkreis einbezogen werden.

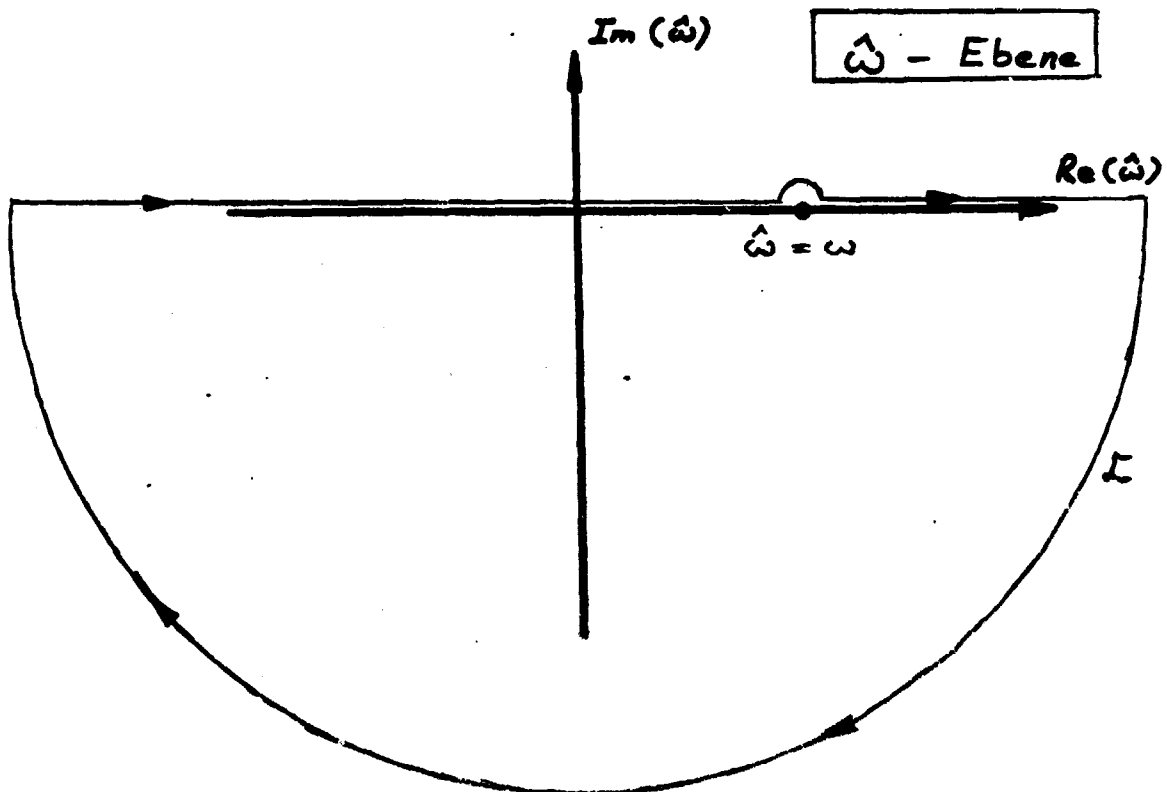


Abb. 8

Die Integration längs der reellen Achse, auf der ein Pol liegt (ein Teilweg von \mathcal{L}), läßt sich zerlegen in das Integral längs der reellen Achse mit Ausnahme eines infinitesimalen Wegstücks, auf dem der Pol liegt - dies ist genau die Definition des Hauptwertintegrals (z.B. Mathews, J. und R.L. Walker [1965], S. 455) - sowie in ein Integral längs des infinitesimalen Halbkreises (im mathematisch negativen Sinn), der die beiden Enden des Integrationsweges beim Hauptwertintegral verbindet:

$$\int_{\substack{+\infty \\ -\infty}} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} = \oint_{\substack{+\infty \\ -\infty}} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} + \int_{\substack{\text{Halb-} \\ \text{Kreis}}} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} \quad (4.1.17)$$

(reelle Achse)

Dabei soll \oint bedeuten, daß das Integral im Sinne des Hauptwertes zu verstehen ist. Das Integral über den infinitesimal kleinen Halbkreis um die Polstelle läßt sich sofort angeben:

$$\int_{\substack{\text{Halb-} \\ \text{Kreis}}} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} = -\pi i \cdot k(\omega) \quad (4.1.18)$$

(Halb-kreis)

Da $K(\hat{\omega})$ nur in der unteren Halbebene überall, auch im Unendlichen, analytisch ist, müssen wir \mathcal{L} in der unteren Halbebene schließen (hier kommt jetzt die Kausalitätsbedingung für $K(\tau)$ mathematisch ins Spiel). Diesen Rückweg legen wir in den Bereich des negativ-imaginär Unendlichen ($\omega' = -\infty$), weil wir dann den Vorteil haben, daß das Integral (4.1.16) längs dieses Teilweges keinen Beitrag liefert: $K(\hat{\omega})$ verschwindet dort ja, wie man (4.1.12) unter Erinnerung an die Kausalitätsbedingung ($\tau > 0$) entnimmt.

Insgesamt wird jetzt aus (4.1.16):

$$K(\omega) = - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} - \pi i k(\omega) \right]$$

wobei das negative Vorzeichen seine Ursache darin hat, daß wir - um der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ zu folgen - die Kurve im mathematisch negativen Sinne durchlaufen. Auflösen nach $K(\omega)$ liefert

$$K(\omega) = - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} \quad (4.1.19)$$

Es sei angemerkt, daß $\hat{\omega}$ hier die Rolle einer reellen Variablen spielt, da das Hauptwertintegral nur längs der reellen Achse der komplexen $\hat{\omega}$ -Ebene geführt wird.

Diese Integralidentität für $K(\omega)$, in der die Kausalitätsbedingung enthalten ist, spalten wir nach Real- und Imaginärteil auf:

$$K(\omega) = K_R(\omega) + i K_I(\omega)$$

Dann ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} K_R(\omega) &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_I(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} \\ K_I(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_R(\hat{\omega})}{\hat{\omega} - \omega} d\hat{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.20)$$

Als Folge des Kausalitätsprinzips gibt es Beziehungen zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Fouriertransformierten des Integralkerns in (4.1.1), der ja als Impulsantwortfunktion die

physikalischen Eigenschaften des Mediums beschreibt; Real- und Imaginärteil von $K(\omega)$ (wie es in (4.1.7) auftritt) sind nicht unabhängig voneinander, sondern stehen gegenseitig als Hilbert-Transformierte in Beziehung. Man kann die Beziehungen (4.1.20) noch durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften (4.1.9) umformen und schreiben

$$\left. \begin{aligned} K_R(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\omega} k_I(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} \\ K_I(\omega) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_R(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.21)$$

Die Beziehungen (4.1.20) bzw. (4.1.21) sind die Dispersionsrelationen in ihrer allgemeinsten Form.

Bei Ausbreitungsproblemen, z.B. bei der Teilchenstreuung in der Quantentheorie, wird (4.1.1) allgemeiner formuliert; der Integralkern ist dann die zeitabhängige Green'sche Funktion ("Propagator") des Problems, welche für physikalisch realisierbare Prozesse ebenfalls einer Kausalitätsbedingung genügen muß: Keine Systemantwort darf außerhalb des "Lichtkegels" liegen, d.h. physikalische Information kann nicht schneller als auf direktem Wege mit Ausbreitungsgeschwindigkeit zum Beobachtungsort gelangen (vgl. Post, E.J. [1962], S. 123/126).

Das "klassische" Anwendungsbeispiel solcher Dispersionsrelationen ist die Integralrelation zwischen Real- und Imaginärteil des komplexen Brechungsindex' der Optik. Da die Ableitung von Dispersionsrelationen für seismische Wellen ganz analog geschieht, soll der optische Fall in seinem Hauptgedanken noch kurz umrissen werden:

Man sucht zunächst einen physikalischen Zusammenhang, der in allgemeiner Form im Sinne von (4.1.1) als Faltungsintegral geschrieben werden kann und dessen Integralkern die interessierende physikalische Eigenschaft des Mediums beschreibt, bei der Fragestellung dieses Beispiels also eine elektromagnetische Eigenschaft. So kommt man auf die allgemeinste Formulierung des lokalen Zusammenhangs zwischen Verschiebungsvektor \vec{D} und elektrischem Feld \vec{E} (z.B. Post, E.J. [1962])

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(t-t') \cdot \vec{E}(t') dt' \quad (4.1.22)$$

Dabei muß der Integralkern, eine verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante, der Kausalitätsbedingung genügen, denn keine dielektrische Verschiebung kann auftreten vor dem entsprechenden elektrischen Feld.

Um die Dispersionsrelationen für die Fouriertransformierte des Integralkerns:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_R(\omega) + i \epsilon_I(\omega) \quad (4.1.23)$$

anwenden zu können, muß man zuvor berücksichtigen, daß $\epsilon(\bar{\omega})$ für $\omega' \rightarrow -\infty$ nicht verschwindet, wie bei der obigen Herleitung für $K(\bar{\omega})$ vorausgesetzt wurde; dies liegt daran, daß $\epsilon(t-t')$ für $t = t'$ den Wert der statischen Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{\text{stat.}}$ annehmen soll. $\epsilon(t-t')$ setzt sich also aus einer δ -Funktion und weiteren Anteilen zusammen

$$\epsilon(t-t') = \epsilon_{\text{stat.}} \cdot \delta(t-t') + \gamma(t-t') \quad (4.1.24)$$

und es ist die δ -Funktion, die in (4.1.12) dafür sorgt, daß $\epsilon(\omega)$ auf dem im imaginär-unendlichen Rand nicht verschwindet. Der Anteil $\gamma(t-t')$ verhält sich dagegen, wie wir es für einen Integralkern vorausgesetzt hatten.

Wie bei C. De Witt und R. Omnes [1960], S. 24 ff., ausführlich gezeigt, hilft man sich ganz einfach dadurch, daß man anstatt für $\epsilon(\omega)$ nun eben Dispersionsrelationen für $\epsilon(\omega) - \epsilon(-\omega)$ aufstellt. Diese Dispersionsrelationen lassen sich noch in gewissem Umfange umschreiben durch Zuhilfenahme von aus anderen Überlegungen gewonnenen Eigenschaften von $\epsilon(\omega)$ für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$. Die Relationen, die man nun erhält, sind Dispersionsrelationen für $\epsilon_R(\omega)$ und $\epsilon_I(\omega)$ (z.B. Hagedorn, R. [1963], S. 95).

Um daraus nun Dispersionsrelationen für den komplexen Brechungsindex zu bekommen, muß man noch eine Beziehung zwischen der Dielektrizitätskonstanten und dem Brechungsindex verwenden. Es gilt die Maxwell'sche Beziehung:

$$\epsilon(\omega) = n^2(\omega) = \left[n_R(\omega) - i \frac{c}{\omega} \alpha(\omega) \right]^2 \quad *) \quad (4.1.25)$$

Wenn man dann noch den Fall schwacher Absorption (z.B. dünnes Gas, Hagedorn, R. [1963]) annimmt, also

$$\frac{c}{\omega} \cdot \alpha \ll n_R \quad (4.1.26)$$

dann kommt man durch Taylorentwicklung von (4.1.25) schließlich auf

$$\left. \begin{aligned} n_R(\omega) &= n_R(0) - \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\hat{\omega})}{\hat{\omega}^2 - \omega^2} d\hat{\omega} \\ \alpha(\omega) &= \frac{2\omega^2}{c \cdot \pi} \int_0^\infty \frac{n_R(\hat{\omega}) - n_R(0)}{\hat{\omega}^2 - \omega^2} d\hat{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.27)$$

*) Auch hier ist wieder zu beachten, daß bei anderer Definition der Fouriertransformation (vgl. Fußnote S. 72) der Imaginärteil sein Vorzeichen umkehrt.

Diese Dispersionsrelationen für den komplexen Brechungsindex sind die Kronig-Kramers-Relationen im engeren Sinne, wobei oft noch $n_R(0) = 1$ gesetzt wird (dünne Gase). Auch die Bezeichnung "Dispersionsrelationen" wird hieran klar, denn sofern $a(\omega)$ von Null verschieden wird, wird die Phasengeschwindigkeit

$$c(\omega) = \frac{c_0}{n_R(\omega)} \quad (4.1.28)$$

frequenzabhängig, wir haben Dispersion.

Um also von den allgemeinen Relationen (4.1.20) bzw. (4.1.21) auf Relationen für die Wellenausbreitungseigenschaften zu kommen, waren also zwei Schritte nötig:

- (1) Aufstellen eines integralen Zusammenhangs vom Typ (4.1.1) bzw. (4.1.22), wo der Integralkern des Faltungsintegrals die Eigenschaften des Mediums enthält.
- (2) Verwendung eines Zusammenhangs zwischen dem Integralkern (bzw. dessen Fouriertransformierter) und einer für die Wellenausbreitung typischen Größe, hier des komplexen Brechungsindex.

Genau diese beiden Schritte müssen wir auch anwenden, um Dispersionsrelationen für die seismische Wellenausbreitung zu gewinnen.

4.2. Dispersionsrelationen für elastische Wellen und ihre Bedeutung

Wie zum Schluß des vorangehenden Kapitels 4.2 aufgezeigt, werden wir also zunächst nach einem Stoffgesetz suchen müssen, welches die Eigenschaften des Mediums durch die Kernfunktion eines Faltungsintegrals beschreibt. Dies finden wir in dem sog. "Boltzmann'schen Ansatz"; es ist die allgemeinste Formulierung eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Deformation [Silva, W., 1976; Kogan, S.Ya., 1966]. Er enthält also auch alle linearen rheologischen Modelle, die in Kap. 2.2 in (2.2.6) zusammengefaßt sind. Der Boltzmann'sche Ansatz wird gelegentlich in verschiedenen Formulierungen, die einander aber äquivalent sind [F. Collins und C.C. Lee, 1956, S. 25], angegeben; wir wählen hier diejenige Formulierung, die dem Konvolutionsintegral (4.1.1) bzw. (4.1.22) identisch ist, einer direkten Verallgemeinerung des Hooke'schen Gesetzes (2.1.12) entspricht und die wir etwa bei Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958] oder Knopoff, L., [1964] finden:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t') \cdot \epsilon(t') dt' \quad (4.2.1)$$

mit der Nebenbedingung der Kausalität, daß

$$f(t-t') = 0 \quad \text{für} \quad t < t' \quad (4.2.2)$$

Da σ und ϵ Tensoren zweiter Stufe sind, ist die "memory-function" oder "Relaxationsfunktion" $f(t-t')$ ein Tensor 4. Stufe, der allerdings - wie beim Hooke'schen Gesetz (2.1.12) - für ein homogenes und isotropes Medium in nur zwei voneinander unabhängige Relaxationsfunktionen aufgeteilt werden kann; die Beziehung (4.2.1) kann dann aufgeteilt werden in eine solche für reine Kompressions- und eine solche für reine Scherungsdeformationen [Silva, W., 1976]. Für das Folgende unserer Rechnungen wollen wir in diesem Sinne ein solches Konvolutionsintegral (4.2.1) mit Nebenbedingung (4.2.2) jeweils sowohl für Kompressions- als

auch Scherdeformationen verstehen, so daß wir mit dem gleichen Formalismus wahlweise Kompressions- wie auch Scherwellen-Ausbreitung beschreiben; für den Fall einer gleichmäßigen Kompression stellt sich die Deformation

$$\varepsilon_p(t') = e_p(t') \cdot \delta_{ik} \quad (4.2.3)$$

dar, und der Integralkern wird als

$$f_p(t-t') = \varepsilon \lambda(t-t') + 2\mu(t-t') \quad (4.2.4)$$

geschrieben, wobei $\lambda(t-t')$ und $\mu(t-t')$ Verallgemeinerungen der Lamé'schen Moduln sind. Entsprechend stellen wir eine reine Scherdeformation durch

$$\varepsilon_s(t') = e_s(t') \cdot \alpha_{ik} \quad (4.2.5)$$

$$\text{mit: } \alpha_{ik} = 0 \quad \text{für } i = k$$

dar und formulieren

$$f_s(t-t') = 2\mu(t-t') \quad (4.2.6)$$

Die Formel von Sokoloff, P.T. und Skriabin, V.J. [1937], wie sie Menzel, H. [1954] angegeben hat, ist eine Formulierung der elastischen Nachwirkung im Sinne des Boltzmann'schen Ansatzes (4.2.1), wenngleich sie noch in die Klasse des "standard-linear-solid"-Stoffgesetzes vom Typ (2.2.1) gehört; die von Menzel vorgeschlagene Erweiterung der Sokoloff-Skriabin'schen Formel [Menzel, H., 1954, Formel (25)] läßt sich jedoch nicht mehr auf die "standard-linear-solid" zurückführen, sie gehört jedoch zur Klasse der linearen Ansätze im Boltzmann'schen Sinne, und ihre Spezialisierung liegt in der Verallgemeinerung der "memory"-Funktion.

Die Fouriertransformation von (4.2.1) ergibt, ganz entsprechend zu (4.1.7),

$$\sigma(\omega) = f(\omega) \cdot \epsilon(\omega) \quad (4.2.7)$$

was, als tensorielle Gleichung verstanden, im Vergleich mit (2.2.6) wieder die Äquivalenz einer Darstellung durch zeitliche Ableitungen von σ und ϵ mit dem Boltzmann'schen Ansatz zeigt.

Für den Integralkern $f(t-t')$ gilt eine Kausalitätsbedingung (4.2.2) und damit gilt für die Fouriertransformierte Dispersionsrelationen. Wegen der Aufspaltung des Ansatzes (4.2.1) in einen Kompressions- und einen Scherungsanteil gelten mithin Dispersionsrelationen auch für alle Linearkombinationen der Fouriertransformierten für Kompression und Scherung, also auch für

$$\frac{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)}{\varrho} = \mathcal{L}_L^2(\omega) \quad (4.2.8)$$

und:

$$\frac{\mu(\omega)}{\varrho} = \mathcal{L}_T^2(\omega) \quad (4.2.9)$$

Dabei denken wir uns die komplexen Moduln (die hier jetzt also als Fouriertransformierte von Integralkernen entstehen) in Real- und Imaginärteil aufgespalten mit den Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu(\omega) &= \mu_R(\omega) + i \mu_I(\omega) \\ \lambda(\omega) &= \lambda_R(\omega) + i \lambda_I(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10)$$

Für die Form der Dispersionsrelationen müssen wir jetzt aber - ganz analog zur Überlegung bei der Dielektrizitätskonstanten in Abschnitt 4.1 - beachten, daß $\mu(-i\omega)$ und $\lambda(-i\omega)$ nicht verschwinden. Denn der Boltzmann'sche Ansatz (4.2.1) muß ja in seiner einfachsten Form das Hooke'sche Gesetz (2.1.12) enthalten, und dies gelingt nur, wenn der Integralkern δ -Funktionen

enthält. Man stellt ganz entsprechend zunächst Dispersionsrelationen für $\mu(\omega) - \mu(-i\infty)$ und $\lambda(\omega) - \lambda(-i\infty)$ auf und formt um mit Hilfe folgender weiterer Kenntnisse:

Es ist zunächst

$$\lambda_I(0) = 0 \quad \text{und} \quad \mu_I(0) = 0 \quad (4.2.11)$$

weil wir bei einer unendlich langsamen Deformation ($\omega \rightarrow 0$) keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Deformation erwarten^{*)}. Und da der mit der δ -Funktion verbundene Anteil der elastischen Moduln reell ist, folgt auch:

$$\lambda_R(-i\infty) = \lambda_R(0) \quad \text{und} \quad \mu_R(-i\infty) = \mu_R(0) \quad (4.2.12a)$$

Und schließlich gilt auch

$$\lambda_I(-i\infty) = 0 \quad \text{und} \quad \mu_I(-i\infty) = 0 \quad (4.2.12b)$$

weil kein "Resonator" denkbar ist, der unendlich hohe Frequenzen absorbieren könnte [Futterman, W.I., 1962] (Analogie zur optischen Dispersionstheorie). Für $\mu(\omega)$ und $\lambda(\omega)$ erhält man dann zunächst Dispersionsrelationen der Form^{**)}

$$\left. \begin{aligned} \mu_R(\omega) &= \mu_R(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\hat{\omega} \mu_I(\hat{\omega})}{\hat{\omega}^2 - \omega^2} d\hat{\omega} \\ \mu_I(\omega) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu_R(\hat{\omega}) - \mu_R(0)}{\hat{\omega}^2 - \omega^2} d\hat{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

*) Vgl. Einführung komplexwertiger elastischer Moduln aus der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Deformation, S. 21

**) Wenn wir jetzt alles Folgende nur für Scherwellen anschreiben, so bedeutet dies - wie oben erläutert - keine Einschränkung der Allgemeinheit. Man ersetze nur μ durch $\lambda + 2\mu$, um zu Longitudinalwellen überzugehen.

Dies ist die Form, wie sie auch für das komplexe $\epsilon(\omega)$ in Kap. 4.1 gilt [Hagedorn, R., 1963, S. 95].

Nun interessieren wir uns jedoch nicht für die Dispersionsrelationen der elastischen Moduln, sondern für solche, die für die komplexe Wellenzahl

$$\hat{k} = \frac{\omega}{\hat{c}} = k - ia \quad (2.1.50)$$

gelten. Damit ist, zusammen mit (4.2.8) und (4.2.9) der Zusammenhang im Sinne von Punkt (2) am Schluß des Kapitels 4.1 hergestellt.

Im Gegensatz zur Optik, wo die komplexe Wellenzahl \hat{k} bzw. der komplexe Brechungsindex n über die Maxwell'sche Relation mit der Größe ($\epsilon(\omega)$), für die Dispersionsrelationen gelten, in Zusammenhang steht, wie folgt

$$\hat{k} = \frac{\omega \cdot n(\omega)}{c_0} \sim \sqrt{\epsilon(\omega)}$$

gilt hier bei elastischen Wellen

$$\hat{k} = \frac{\omega}{\hat{c}(\omega)} \sim \frac{1}{\sqrt{\mu(\omega)}}$$

also Reziprozität zu derjenigen Größe, für welche eine Dispersionsrelation gilt. Dieser Unterschied ist wesentlich, denn er bewirkt, daß man nicht einfach die Dispersionsrelationen für den komplexen Brechungsindex der Optik auf die seismische Wellenausbreitung direkt übertragen kann, auch nicht, wenn man - etwas gezwungen - einen Brechungsindex für seismische Wellen im homogenen Medium [Futterman, W.I., 1962; Lamb, G.L., 1962] einführt.

Um nun Dispersionsrelationen für das komplexe \hat{k} bei elastischer Wellenausbreitung zu erhalten, nachdem wir über das Stoffgesetz (Boltzmann'scher Ansatz (4.2.1)) solche Relationen für die elastischen Moduln (4.2.13) haben, schreiben wir (4.2.10) ein wenig um:

$$\mu(\omega) = \mu_R(\omega) \left[1 - \frac{\mu_R(\omega) - \mu_R(0)}{\mu_R(0)} - i \frac{\mu_I(\omega)}{\mu_R(0)} \right] \quad (4.2.14)$$

und wir setzen jetzt voraus, daß

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_R(\omega) - \mu_R(0)}{\mu_R(0)} &\ll 1 \\ \frac{\mu_I(\omega)}{\mu_R(0)} &\ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.15)$$

was bedeutet, daß die Anelastizität des Mediums gering ist; diese Bedingung ist in der Geophysik immer sehr gut erfüllt. Wir erhalten unter Verwendung dieser Näherungen:

$$K_s = \frac{\omega}{\alpha_s} \approx \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_R(\omega)}{\rho}}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu_R(\omega) - \mu_R(0)}{\mu_R(0)} - \frac{i}{2} \frac{\mu_I(\omega)}{\mu_R(0)} \right] \quad (4.2.16)$$

bzw. nach Real- und Imaginärteil aufgespalten (2.1.50)

$$K_s = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_R(\omega)}{\rho}}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu_R(\omega) - \mu_R(0)}{\mu_R(0)} \right] \quad (4.2.17)$$

$$a_s = \frac{\omega \mu_I(\omega)}{2 \mu_R(0) \sqrt{\frac{\mu_R(\omega)}{\rho}}} \quad (4.2.18)$$

Da nun für die elastischen Moduln Dispersionsrelationen vom Typ (4.2.13) gelten, lassen sich nunmehr mit (4.2.17) und (4.2.18) entsprechende Relationen für K und a aufstellen:

$$\left. \begin{aligned} K_s(\omega) &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_R(0)}{\rho}}} + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a_s(\hat{\omega})}{(\hat{\omega}^2 - \omega^2)} d\hat{\omega} \\ a_s &= - \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_s(\hat{\omega})}{\hat{\omega}(\hat{\omega}^2 - \omega^2)} d\hat{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.19)$$

wobei verwendet wurde, daß das Hauptwertintegral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega^2} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\omega - \epsilon} - \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} \right\}$$

Definition des
Hauptwertes

$$= 0$$

(4.2.20)

wird. Wenn wir jetzt mit (2.1.52) bedenken, daß

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}$$

ist, so besagen die Dispersionsrelationen (4.2.19) für elastische Wellen, daß (in dieser Näherung für schwache Absorption) zu dem Term

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)}$$

noch ein zusätzlicher, frequenzabhängiger Term notwendigerweise hinzukommt, sobald der Absorptionskoeffizient $a(\omega)$ von Null verschieden ist. Es wird also notwendigerweise die Phasengeschwindigkeit c eine Funktion der Frequenz, sobald Absorption auftritt. Absorption hat notwendig Dispersion zur Folge und - mit der zweiten Integralbeziehung (4.2.19) - gilt diese Aussage auch umgekehrt.

Dies hat bedeutende Konsequenzen auf die Ausbreitung seismischer Impulse: Ein seismischer Impuls verformt sich hinsichtlich seiner Gestalt längs des Ausbreitungsweges nicht nur infolge der Absorption, daß also - im natürlichen Gestein - die hohen Frequenzen aus dem Spektrum des Impulses stärker als die niedrigen Frequenzen herausgedämpft werden (wodurch der Impuls verbreitert wird), sondern gleichzeitig "zerfließt" der Impuls auch, weil die einzelnen Teilwellen, aus denen der Impuls sich spektral zusammensetzt, sich mit verschiedener Phasengeschwindigkeit

ausbreiten; gerade dadurch wird die Einhaltung der Kausalitätsbedingung für die Impulsausbreitung gewährleistet. Als Beispiel möge die Ausbreitung eines rechteckigen Impulses betrachtet werden: Durch alleiniges Hinwegdämpfen der hohen Frequenzen (welche die "steilen" Impulsflanken erzeugen) würde der Impuls nach einiger Zeit als symmetrische Glockenkurve zerfließen, dessen Flanken von $t = -\infty$ bis $+\infty$ reichen; damit wäre das Kausalitätsprinzip verletzt, daß keine Information zeitlich vor der Impulsaussendung (etwa zur Zeit $t = 0$) vorhanden sein kann; vgl. Abb. 9. Erst die zusätzliche Dispersion der Teilwellen des Impulses sorgt für Einhaltung der Kausalität, der Impuls zerfließt unsymmetrisch, Abb. 9

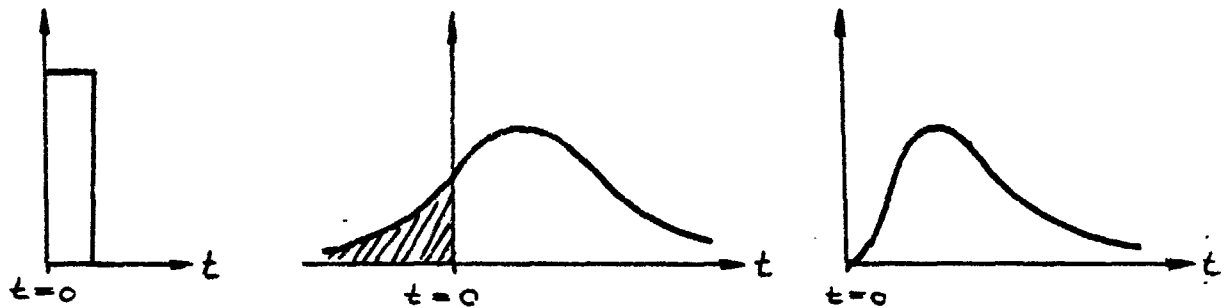


Abb. 9: Zerfließen eines rechteckigen Impulses durch Absorption alleine (nichtkausal) und durch Absorption - Dispersion gemäß den Dispersionsrelationen (kausal)

Das kausale Zerfließen eines δ -Impulses unter bestimmten, realistischen Modellannahmen finden wir für verschiedene, zurückgelegte Ausbreitungswege bei Futterman, W.I. [1962] dargestellt.

Zur Messung der Absorption aus reflexionsseismischen Daten wird u.a. die sog. rise-time-analysis diskutiert: Man möchte aus der Veränderung (Verflachung) des Anstiegs eines seismischen Impulses beim Durchlaufen durch das Medium die Absorption bestimmen [Nur, A., 1978]. Bei dieser Methode muß man aber auch mit berücksichtigen, daß sich die Impulsform auch durch die mit der Absorption verbundenen Dispersion verändert.

Für die späteren Rechnungen ist es praktisch, die erste der beiden Dispersionsrelationen (4.2.19) noch in andere Form zu bringen. Wir gehen von (4.2.17) aus und betrachten diese Formel für $\omega \rightarrow 0$:

$$k(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} \longrightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_2(\omega)}{\rho}}} \quad (4.2.21)$$

Daraus folgt aus der ersten Relation von (4.2.19), daß gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2} d\tilde{\omega} = 0 \quad (4.2.22)$$

Die Umformung gelingt nun so, daß man vom Hauptwertintegral in (4.2.19) Null in der Form von (4.2.22) subtrahiert:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_2(\omega)}{\rho}}} + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\alpha(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} - \frac{\alpha(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2} \right] d\tilde{\omega} \quad (4.2.23)$$

und man erhält:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_2(\omega)}{\rho}}} + \frac{2\omega^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - \omega^2)} d\tilde{\omega} \quad (4.2.24)$$

Damit haben wir diese Dispersionsrelation auf die bei Futterman, W.I. [1962] verwendete Form (Formel 10) gebracht.

Futterman, W.I. [1962] und Lamb, G.L. [1962] haben Dispersionsrelationen für die Ausbreitung seismischer Wellen in Betracht gezogen und auf die notwendigerweise mit Absorption verbundene Dispersion hingewiesen. Beide Autoren leiten ihre Dispersionsrelationen nicht aus einem Zusammenhang des Typs (4.1.1) her, sondern sie definieren einen komplexen Brechungsindex in einer etwas künstlichen Weise, und sie betrachten dann die kausale

Ausbreitung eines Wellenpakets im Sinne der Wellengleichung^{*)}. Eine solche Herleitung der Dispersionsrelationen wäre übersichtlicher und klarer, wenn sie über die Green'sche Funktion der Wellengleichung, mit deren Hilfe man den Ausbreitungsvorgang in eine verallgemeinerte Form vom Typ (4.1.1) bringen kann, mit der Nebenbedingung der Kausalität der Ausbreitung ("nichtlokale Kausalität") gestaltet würde^{**)}. Eine Herleitung der Dispersionsrelationen über die Ausbreitung gemäß der Wellengleichung anstatt über ein Stoffgesetz, wie hier dem Boltzmann'schen Ansatz (4.2.1), zeigt auf, daß die Dispersionsrelationen (4.2.19) bzw. (4.2.24) nicht nur für die Absorption im engeren Sinne, sondern für jede Dämpfung der Wellen gelten, also auch für die Energieverluste durch Streuung.

Während Lamb, G.L. [1962] seine weiteren Betrachtungen (z.B. zum kausalen Zerfließen eines rechteckigen Anfangsimpulses) auf der etwas unrealistischen Annahme aufbaut, daß der Absorptionskoeffizient (bzw. Extinctionskoeffizient)

$$\alpha \sim \omega^{1/2} \quad (4.2.25)$$

sei, betrachtet Futterman, W.I. [1962] den in der Natur generell beobachteten Fall, daß

$$\alpha \sim \omega \quad \text{d.h.: } Q = \text{const} \quad (4.2.26)$$

ist.

Aus (2.1.61) haben wir

$$\alpha = \frac{\omega}{2Q \cdot c} \quad (2.1.61)$$

^{*)} Die Wellengleichung kommt - insbesondere bei Futterman - implizit zum Ausdruck dadurch, daß die Ausbreitungsvorgänge für die einzelnen Frequenzen durch Funktionen vom Typ

$$i[k \cdot x - \omega \cdot t]$$

e

beschrieben werden.

^{***)} Dies ist der übliche Weg, um bei Streuprozessen Dispersionsrelationen zu erhalten; vgl. z.B.: Hilgevoord, J. [1962], S. 3 oder Corinaldesi, E. [1959], S. 382.

wobei c die Phasengeschwindigkeit ist. Wenn wir jetzt mit Hilfe der Dispersionsrelationen (4.2.19) bzw. (4.2.24) die tatsächliche Dispersion, also den Verlauf von $K(\omega)$ als Funktion der Frequenz, ausrechnen wollen, für die $Q = \text{const}$ Annahme (4.2.26) (wie wir es in der Natur beobachten, unabhängig davon, daß es nicht ganz einfach ist, Modellvorstellungen für einen - insbesondere linearen - Mechanismus hierzu zu entwickeln, vgl. Kap. 2.2), so beschränken wir uns wieder auf den Fall schwacher Absorption. In diesem Falle ist der zu $\frac{\omega}{c(0)}$ in (4.2.19) bzw. (4.2.24) hinzukommende frequenzabhängige, dispersive Anteil eine kleine Korrektur, oder anders ausgedrückt: die Dispersion ist schwach. Das aber wiederum berechtigt uns dazu, in dem oben stehenden Ausdruck für a (2.1.61) die Phasengeschwindigkeit durch die Konstante $c(0)$ zu ersetzen, da dieser Ausdruck ja nur im "Korrekturterm" auftritt und wir uns nur für die erste Näherung interessieren. Indem wir die Bezeichnung

$$c(0) = \sqrt{\frac{\mu_R(0)}{\epsilon}} \quad (4.2.27)$$

verwenden und a gemäß (2.1.61) nunmehr unter dem Integral von (4.2.24) einsetzen, erhalten wir:

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(0)} + \frac{\omega^3}{\pi \cdot c(0)} \int_0^{\infty} \frac{1}{Q \cdot \tilde{\omega} (\tilde{\omega}^2 - \omega^2)} d\tilde{\omega} \quad (4.2.28)$$

Versucht man nun das Hauptwertintegral zu lösen, so stellt man fest, daß das Integral an der unteren Grenze divergiert, sofern man $Q = \text{const}$ annähme; da $K(\omega)$ gemäß (4.2.28) physikalisch sinnvolle Verhältnisse beschreiben soll, muß notwendigerweise gefolgert werden, daß ein $Q = \text{const}$ - Gesetz nicht über alle Frequenzen gelten kann. Damit das Integral in (4.2.28) konvergiert, ist es daher zwingend notwendig, daß $Q \rightarrow \infty$ strebt für $\omega \rightarrow 0$. Oder für den Absorptionskoeffizienten bedeutet dies, daß a für $\omega \rightarrow 0$ schneller als linear zu Null werden muß. Futterman, W.I. [1962] hat verschiedene funktionale Zusammenhänge für $a(\omega)/\omega \rightarrow 0$ untersucht und gezeigt, daß es genügt, eine untere Grenzfrequenz ω_0 anzunehmen, unterhalb welcher

man a zum Verschwinden bringt (d.h. $Q \rightarrow \infty$ streben läßt), wobei es für $\omega \gg \omega_0$ gleichgültig ist, in welcher Art $a \rightarrow 0$ strebt; man kann also auch sprunghaft $a = 0$ setzen für $\omega \leq \omega_0$. Dabei darf ω_0 selbst beliebig klein werden, so daß die Bedingung $\omega \gg \omega_0$ für praktische Frequenzen immer erfüllt ist. Nach diesen Überlegungen läßt sich nunmehr das Integral in (4.2.28) berechnen, in folgender Weise:

$$\int_{\omega_0}^{\infty} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \epsilon} + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \right\} \quad (4.2.29)$$

und man erhält im Rahmen dieser Näherung:

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} \left[1 - \frac{1}{\pi Q} \ln \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right] \quad (4.2.30)$$

ω_0 ist eine nicht näher festgelegte untere Grenzfrequenz, die zwar endlich aber beliebig klein sein mag.

Die Dispersion erweist sich als logarithmisch. Die dadurch bedingte, nur sehr schwache Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit macht den Nachweis der Dispersion schwierig [Futtermann, W.I., 1962]. Wenn man mit dem Ausdruck (4.2.30) für $K(\omega)$ in die zweite der Dispersionsrelationen (4.2.19) eingeht, so ergibt sich wieder (2.1.61), wie es zu verlangen ist.

Es mag zunächst unbefriedigend erscheinen, mit einem Ansatz (2.1.61) und $Q = \text{const}$ zu rechnen, weil der Absorptionskoeffizient für $\omega \rightarrow 0$ (quasistatisch) dann verschwindet. Verwendet man statt dessen den Ansatz

$$a(\omega) = a_0 + a_1 \cdot \omega$$

für den Absorptionskoeffizienten, so ergibt sich nach Einsetzen in (4.2.24):

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} - \frac{2a_0}{\pi} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{c_0}{c(\omega) Q_0 \pi} \cdot \ln \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

wobei ω_0 wiederum eine untere Grenzfrequenz ist, die für die Konvergenz der Integrale notwendig ist und Q_0 jetzt definiert ist als

$$Q_0 = \frac{1}{2c(\omega_0)}$$

so daß es dem bisherigen Q entspricht. Man sieht, daß man $K(\omega)$ durch Zusammenfassen der ersten beiden Terme auf die gleiche Form wie (4.2.30) bringen kann.

Wir wollen nun einige Abschätzungen über die größenordnungsmäßige Auswirkung der Dispersion vornehmen. Dabei sei nochmals auf die Voraussetzungen hingewiesen, unter denen die für das Folgende verwendete Beziehung (4.2.30) entstanden ist, nämlich die Gültigkeit eines linearen Stoffgesetzes (4.2.1) (Superpositionsprinzip) und ein $Q = \text{const}$ - bzw. $a \sim \omega$ - Gesetz. Aus der frequenzabhängigen Geschwindigkeit $c(\omega)$, die sich aus (4.2.30) ergibt, folgt für die Laufzeit einer Welle der Frequenz ω und für die Weglänge s :

$$t(\omega) = \frac{s}{c(\omega)} = \frac{s}{c_0} \left(1 + \frac{Q}{\omega} \right) \quad (4.2.31)$$

Betrachten wir jetzt die Laufzeitdifferenz, die zwei Signale unterschiedlicher Frequenz, ω_1 und ω_2 , haben, so folgt:

$$\Delta t = s \cdot \left[\frac{k(\omega_1)}{\omega_1} - \frac{k(\omega_2)}{\omega_2} \right] = t_1 - t_2 \quad (4.2.32)$$

Mit (4.2.30) dann also:

$$\Delta t = \frac{s}{c(\omega) \cdot \pi \cdot Q_0} \ln \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \quad (4.2.33)$$

Die aufgrund der Dispersion gegebene Laufzeitdifferenz für Wellen verschiedener Frequenz hängt nicht von den Frequenzen selbst, sondern von deren Quotienten ab. Wenn $\omega_2 > \omega_1$, dann wird $\Delta t = t_1 - t_2$ positiv, d.h. die hochfrequente Welle läuft schneller (vgl. z.B. Wuenschel, P.C. [1965], Fig. 12)*).

*) In der Nomenklatur der Optik wäre dies eine "anomale Dispersion".

- a) Für die Registrierung eines Fernbebens, dessen Raumwellen etwa durch den Erdmantel gelaufen seien, machen wir folgende Abschätzung:

$$Q = 10^3 \quad \text{als eine Größenordnung eines für den gesamten Laufweg "pauschalen" Qualitätsfaktors, gemäß (2.1.64)}$$

$$s = 4 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$c(o) = 8 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 100 \quad (\text{z.B. } f_2 = 10 \text{ Hz, } f_1 = 0,1 \text{ Hz})$$

Dann wird

$$\Delta t = 0,73 \text{ sec} \quad (4.2.34)$$

- b) Als Beispiel aus der Explorationsseismik wählen wir folgende typische Werte zur Abschätzung:

$$Q = 10^2 \quad \text{als typischer Wert für Sedimentdecken}$$

$$s = 2 \cdot 10^3 \text{ m} \quad \text{entspricht einer Tiefe der reflektierenden Grenzfläche von } 10^3 \text{ m}$$

$$c(o) = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 5 \quad (\text{z.B. } f_2 = 50 \text{ Hz, } f_1 = 10 \text{ Hz} \text{ als typische Frequenzen})$$

Dies ergibt:

$$\Delta t = 0,0026 \text{ sec} \quad (4.2.35)$$

In beiden Fällen scheint es zunächst, daß Zeitdifferenzen der angegebenen Größenordnung meßtechnisch auflösbar seien. Moderne Standard-Feldapparaturen für Digitalseismik haben

eine sampling-rate von 2 msec, und es gibt heute bereits Apparaturen, die 0,5 msec auflösen können. Trotzdem wird ein solch direkter Nachweis der Dispersion als Folge verschiedener Laufzeit so nicht möglich sein: Die Laufzeitbestimmung erfordert nämlich, daß man keine monochromatischen Wellen, sondern möglichst scharfe Impulse als Signale vorliegen hat. Diese enthalten ein ganzes Spektrum von Signalanteilen; versucht man etwa durch Bandpaßfiltern einzelne Spektralabschnitte herauszuschneiden, so wird die zur Laufzeitbestimmung wichtige Impulseinsatzzeit immer unschärfer (Unschärferelation endlicher Signale, z.B. Fischer, F.A. [1969], S. 29).

Die Dispersion in ihrem Ausdruck durch die Frequenzabhängigkeit der Laufzeit mag aber vielleicht bei Messungen nach dem Vibroseis-Verfahren (z.B. Maaß, H.W. [1964]) geringfügige Auswirkungen haben: Dadurch, daß der hochfrequente Anteil des sweeps ein wenig schneller läuft, mag durch die Dispersion eine geringfügige, zusätzliche Verbreiterung des Korrelationspeaks entstehen. In der Größenordnung einiger Prozent wäre auch jene Korrektur, die man an den Geschwindigkeiten anbringen müßte, die aus sonic-log-Messungen (10 kHz-Bereich) ermittelt werden, wenn man mit den Geschwindigkeiten im Frequenzband der seismischen Exploration vergleicht. Da jedoch die sonic-log-Messungen ohnehin zu ungenau sind, erübrigt sich diese Korrektur.

Deutlicher tritt die Dispersion in Erscheinung, wenn man die Phasen einzelner Frequenzen (etwa der Teilwellen, aus denen der seismische Impuls besteht) betrachtet; denn als Phasenverzögerung würde man die tatsächliche zeitliche Verzögerung Δt in Einheiten der Periode betrachten. Bezieht man auf die Laufzeit der Welle mit der niedrigeren Frequenz, so erscheint es im Falle (4.2.35) so, als ob die Teilwelle der höheren Frequenz einen Phasenvorlauf von

$$\Delta \varepsilon = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \approx 0,8 \approx 47^\circ \quad (4.2.36)$$

erleiden würde. Für einen seismischen Impuls kommt dieses bemerkenswerte Verhalten in der Veränderung des Phasenspektrums beim Durchlaufen der absorbierenden Schicht zum Ausdruck; dies wird im Kap. 7.1 Gegenstand eingehender Betrachtungen sein.

Bei der Diskussion verschiedener einfacher rheologischer Modelle zur Absorption in Kap. 2.2 ergab sich neben einer modell-spezifischen Frequenzabhängigkeit von Q auch eine entsprechende Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit (Dispersion). Der Linearität der Modellannahmen und der physikalischen Forderung nach Kausalität entsprechend, müssen diese $Q(\omega) - c(\omega)$ - "Paare" den Dispersionsrelationen (4.2.19) genügen. Zum Beispiel diskutiert Kolsky, H. [1956] das Verhalten eines linearen viskoelastischen Mediums für $Q = \text{const}$ und er erhält dann eine Dispersion wie (4.2.30). Ebenso wenig verwundert es, wenn Savage, J.C. und M.E. O'Neill [1975] ein spezielles lineares rheologisches Modell von Lomnitz, C. [1957] betrachten, welches in einem gewissen weiten Frequenzbereich ein annähernd $Q = \text{const}$ - Gesetz liefert, und feststellen, daß die Dispersion dieses Lomnitz'schen Modells derjenigen von Futterman, W.I. [1962] unter alleiniger ad hoc Annahme von $Q = \text{const}$ entspricht. Schließlich sei auf die bereits in Kap. 2.2 erwähnte Arbeit von Liu, H.P., Anderson, D.L. und H. Kanamori [1976] hingewiesen, in der ein lineares viskoelastisches Modell vom Typ der "standard linear solid" (2.2.1) durch Überlagerung mit verschiedenen Relaxations- bzw. Retardierungszeiten entwickelt wird, welches in einem weiten Frequenzbereich $Q = \text{const}$ liefert; auch hier gehorcht dann die Phasengeschwindigkeit einem Gesetz (4.2.30) bzw. in der Formulierung für die Laufzeiten (4.2.33).

Im Unterschied zum Kap. 2.2 haben wir in diesem Abschnitt ein physikalisches Modell überhaupt nicht zugrunde gelegt, sondern wir haben - ohne uns um den physikalischen Hintergrund zu kümmern - die Beobachtungstatsache, daß $Q = \text{const}$ bzw. $a \sim \omega$ ist, in (2.1.61) und (4.2.24) bzw. (4.2.19) eingeführt und so (4.2.30) erhalten.

Bereits im Kap. 2.1 (S. 21 ff.) und insbesondere in Kap. 2.2 haben wir auch die Möglichkeit diskutiert, daß die Absorption seismischer Wellen nichtlinearen Stoffgesetzen gehorchen mag. Im Falle nichtlinearer Absorptionsprozesse ist die Annahme (4.2.1) (Superpositionsprinzip) nicht mehr erfüllt und damit gelten nicht mehr die Dispersionsrelationen (4.2.19) bzw. (4.2.24). Damit würde auch für ein $Q = \text{const}$ - Gesetz die Dispersionsformel (4.2.30) nicht mehr richtig sein. Gleichermaßen würde auch die Herleitung der Dispersionsrelationen nach Futterman, W.I. [1962] und Lamb, G.L. [1952] ungültig, denn deren Voraussetzung der Linearität ist implizit enthalten darin, daß sie die Ausbreitung durch eine Wellengleichung (Lösungen vom Typ $e^{i[\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t]}$) annehmen und daß sie Teilwellen linear zum Gesamtimpuls überlagern; die Wellengleichung zur Beschreibung der Ausbreitung elastischer Störungen entsteht aber doch nur, wenn die Beziehung zwischen Spannungstensor und Deformationstensor linear ist (vgl. (2.1.6), (2.1.16))^{*}.

Da jedoch grundsätzlich immer eine physikalische Kausalitätsbedingung gelten muß, lassen sich auch im nichtlinearen Falle immer Dispersionsrelationen aufstellen [Asdente, M., Pascucci, M.C., Ricca, A.M. und P. Venturini, 1974], die dann jedoch anders lauten als die hier hergeleiteten. Speziell für eine Nichtlinearität zweiter Ordnung geht man von einer Faltung vom Typ

$$\Phi(t_1, t_2) = \iint k'(t_1, \hat{t}_1; t_2, \hat{t}_2) \cdot \gamma_1(\hat{t}_1) \cdot \gamma_2(\hat{t}_2) d\hat{t}_1 d\hat{t}_2 \quad (4.2.37)$$

aus, mit der Nebenbedingung der Kausalität

^{*}) Differentialgleichungen, die die Ausbreitung bei nichtlinearem Verhalten beschreiben, behandeln Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958]; insbesondere werden solche Differentialgleichungen diskutiert, die den Typ des Förtsch-Modells [Förtsch, O., 1956] mit $Q = \text{const}$ beinhalten.

$$K(t_1, t_2, t_3) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} t_1 < \hat{t}_1 \\ t_2 < \hat{t}_2 \end{cases} \quad (4.2.38)$$

Für diesen speziellen Fall haben Asdente, M. et al. die "second-order Kronig-Kramers-relations" explizit angegeben. Die insbesondere bei Streuprozessen übliche Methode, die Dispersionsrelationen über die Green'sche Funktion der Ausbreitungsdifferentialgleichung (nichtlokale Kausalitätsbedingung) herzuleiten, die ja auch Futterman, W.I. [1962] und Lamb, G.L. [1962] implizit anwenden, versagt natürlich bei nichtlinearen Prozessen, da man die Lösung des Problems nicht mehr als Faltung einer Quellfunktion mit einer Green'schen Funktion darstellen kann; es gibt keine Green'sche Funktion mehr.

O'Brien, P.N.S. [1961] hat unter Annahme eines $Q = \text{const}$ - Absorptionsgesetzes die Veränderung der Impulsform eines seismischen wavelets mit und ohne die zugehörige Dispersion (gemäß (4.2.30)) betrachtet^{*)}. Aufgrund der durch die Dispersion bedingten Phasenänderungen der Teilwellen, aus denen sich das wavelet spektral zusammensetzt, ergeben sich beträchtliche Änderungen in der Gestalt des Impulses, je nachdem, ob man die Dispersion berücksichtigt oder nicht. Der Vergleich mit der Beobachtung führt O'Brien zu dem Schluß, daß der Absorptionsprozeß nichtlinear sein müsse, da er eine Dispersion nicht nachweisen kann. Spätere Untersuchungen zur Dispersion von O'Brien, P.N.S. und A.L. Lucas [1971] in verschiedenen Bohrungen zeigten ebenfalls keine Dispersion, was einen nichtlinearen Absorptionsprozeß ebenfalls nahelegt, denn nur dann kann die Absorption gemäß $Q = \text{const}$ verlaufen, ohne daß sich Dispersion zeigen muß (vgl. z.B. das Förtsch-Modell, in Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958]).

^{*)} O'Brien basiert auf einem rheologischen, linearen Modell von Kolsky, H. [1956], welches so gestaltet ist, daß $Q = \text{const}$ wird. Notwendig muß dann die Dispersion wie (4.2.30) verlaufen, auch wenn die Dispersionsrelationen nicht verwendet werden; diese wurden ja erst durch Futterman, W.I. [1962] und Lamb, G.L. [1962] eingeführt.

Dagegen kommt Wuenschel, P.C. [1965] sowohl aus in-situ-seismischen Messungen als auch durch modellseismische Untersuchungen zum entgegengesetzten Resultat, daß nämlich die seismischen Impulse eine zur Absorption gehörenden Dispersion aufweisen, die gänzlich den linearen Dispersionsrelationen (4.2.19) bzw. der Dispersion (4.2.30) entsprechen. Auch Savage, J.C. und H.S. Hasegawa [1967] kommen aufgrund experimenteller Beobachtungen zu dem Schluß, daß der Absorptionsmechanismus linear sein müßte. Neuere quasistatische Belastungsversuche mit sehr kleinen Deformationen, die von Brennan, B.J. und F.D. Stacey [1977] ausgeführt wurden, liefern elliptische Hysteresekurven (ohne spitze Enden), was ebenfalls lineare Prozesse nahelegt. Ähnlich finden auch Grüssl, S., K. Deubel und W.-D. Hermichen [1975] aus Geophonversenkmessungen in Bohrlöchern eine Dispersion, die gemäß den Dispersionsrelationen (4.2.19) genau zur Absorption ($Q = \text{const}$) paßt. - Auch Kogan, S.Ys. [1966] vertritt im Rahmen seiner ausführlichen Diskussion verschiedener einfacher rheologischer Modelle eine Kritik an den von Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald [1958] vorgebrachten Gedanken zu nicht-linearen Absorptionsprozessen.

Die von O'Brien, P.N.S. [1961] und Wuenschel, P.C. [1965] ausführlich untersuchten Impulsformänderungen je nach Prozeß einer Absorption mit oder ohne Dispersion stellt die Möglichkeit einer "rise-time-analysis" zur Bestimmung der Absorption aus Reflexionsseismogrammen [Nur, A., 1978] sehr in Frage: Solange wir nicht wissen, ob die Absorption linear oder nichtlinear ist, d.h. ob die Veränderung der Anstiegszeit eines seismischen Impulses ("rise-time") durch Absorption und linear zugehörige Dispersion (gemäß (4.2.19)) bestimmt wird oder durch Absorption mit beliebig anderer (ggf. verschwindender) Dispersion (infolge eines nichtlinearen Prozesses), darf die rise-time-analysis nicht angewendet werden, da sie zu falschen Aussagen führen kann. Wuenschel, P.C. [1965] weist darauf hin, daß eine bereits sehr geringe Dispersion bedeutende Folgen für die Impulsformänderung haben kann^{*)}.

^{*)} Daß selbst bei Annahme linearer Absorption und $Q = \text{const}$ -Verhalten der Schluß aus dem Impulsanstieg ("rise-time") auf den Q -Wert nicht ganz einfach ist, zeigt Strick, E. [1970].

In Kenntnis der Dispersionsrelationen (4.2.30) für lineares rheologisches Verhalten wären Labormessungen denkbar, bei denen man sowohl die Absorption als Funktion der Frequenz als auch die Dispersion in getrennten Experimenten mißt und sodann prüft, ob die gemessenen Absorptions-Dispersions-Kurven den Relationen (4.2.30) genügen; dies wäre damit eine Prüfung auf lineares Absorptionsverhalten. So geben also die widersprüchlichen Beobachtungen über die Dispersion Anlaß, erneute, verlässliche Laborversuche zu konzipieren.

Die Anwendung der Dispersionsrelationen (4.2.19) zur Errechnung von Absorptions-Dispersionspaaren unterzieht Averbuch, A.G. [1969] noch einmal einer kritischen Betrachtung; und zwar versucht er die Schwierigkeiten zu umgehen, die man bei der Berechnung der Dispersion aus einem insbesondere $a \sim \omega$ - Gesetz ($Q = \text{const}$) hat mit dem Verhalten von $a(\omega)$ an der unteren Integralgrenze. Da man im praktischen Falle ohnehin nicht die Integration von 0 bis ∞ ausführen kann, weil man den tatsächlichen Verlauf von $a(\omega)$ über den unendlichen Frequenzbereich gar nicht kennt, ist Averbuch's Abschätzung von großem Wert: Will man die Dispersion durch ein Gesetz vom Typ (4.2.33) bzw. (4.2.30) beschreiben als gültig mit einem Fehler von höchstens 1 % innerhalb eines Frequenzbandes von ω_1 bis ω_2 , so muß $a(\omega)$ proportional zu ω sein innerhalb eines Bereiches von $0,1 \omega_1$ bis $10 \omega_2$ (für 1 % Fehler); das weitere Verhalten von $a(\omega)$ außerhalb dieses Bereichs braucht dann nicht bekannt zu sein (und nicht einem $a \sim \omega$ - Gesetz zu folgen). Darüber hinaus betrachtet Averbuch noch eine allgemeinere Klasse eines funktionalen Zusammenhangs zwischen dem Absorptionskoeffizienten a und der Frequenz, nämlich alle Formen der Art

$$a = a_0 + k \cdot \omega^n \quad (4.2.39)$$

wobei er zulassen kann, daß sich die Potenz n in verschiedenen Frequenzbereichen noch ändert, solange sie nur in einem Bereich von $0,1 \omega_1$ bis $10 \omega_2$ (aus o.g. Gründen) konstant bleibt.

Mit einem solchen Ansatz für a geht man in die Dispersionsrelationen (4.2.19) bzw. (4.2.24) ein. Für $n = 1$ erhält man natürlich die logarithmische Dispersion (4.2.33) bzw. (4.2.30), während sich für $n \neq 1$ - zu (4.2.33) entsprechend umgeformt - ergibt (vgl. auch Pasechnik, V.I. [1969]):

$$\Delta t = k \cdot (\omega_1^{n-1} - \omega_2^{n-1}) \cdot \tan\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (4.2.40)$$

(Durch Taylorentwicklung kann man zeigen, daß dieser Ausdruck in den logarithmischen Zusammenhang für $n \rightarrow 1$ übergeht [Pasechnik, V.I., 1969].)

Bemerkenswert mag sein, daß die Dispersion für $n = 2$ verschwindet. Inwieweit diesen verallgemeinerten Betrachtungen Averbuchs praktische Bedeutung zukommt, hängt davon ab, ob etwa zukünftige Labor- oder in-situ-Messungen eine andere als frequenzproportionale Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten - sei es auch nur in bestimmten Materialien - liefern. Erinnerung sei daran, daß der Absorptionskoeffizient bei Gesteinen mit Flüssigkeitsfüllung einen zur Frequenz quadratischen Anteil enthält (vgl. Kap. 2.3, Azimi, Sh.A. et al. [1968]). Dementsprechend beschränken sich Azimi, Sh.A. et al. [1968] auf die Untersuchung von Absorptions-Dispersions-Paaren mit nahezu frequenzproportionalem Absorptionskoeffizienten für festes Gestein und nahezu frequenzquadratischem Absorptionskoeffizienten für sehr stark mit Wasser durchsetztem Sediment. Das gleiche Problem der Berechnung der Dispersion aus einer nur in einem begrenzten Frequenzbereich bekannten Absorption, wie es Averbuch, A.G. [1969] angeht, betrachtet auch Pasechnik, V.I. [1969], ohne jedoch noch andere Gedanken beizutragen.

Zum Schluß dieses Kapitels seien noch zwei Bemerkungen zur allgemeinen Anwendbarkeit der Dispersionsrelationen angefügt:

- (1) Bei der allgemeinen Formulierung des linearen elastischen Zusammenhangs (4.2.1) haben wir festgestellt, daß die Relaxationsfunktion $f(t-t')$ allgemein ein Tensor 4. Stufe

sei; dies betrifft entsprechend die Fourierdarstellung in (4.2.7). Für das homogene, isotrope Medium enthält dieser Tensor jedoch nur zwei unabhängige Komponenten, die wir durch Aufspaltung in reine Scherdeformationen und reine Dilatationen in zwei getrennte skalare Funktionen zerlegen - und für diese stellen wir die Dispersionsrelationen auf. Unter dem Blickwinkel der aus der Kausalität folgenden Dispersionsrelationen stellt der Übergang zu einem anisotropen Medium keine Problematik grundsätzlicher Art dar; man muß dann eben Dispersionsrelationen für Tensor-komponenten anstatt für skalare Funktionen aufstellen [Post, E.J., 1962].

- (2) Die strenge Theorie der Herleitung der Dispersionsrelationen verlangt im Rahmen des sog. "Titchmarsh-Theorems" (vgl. z.B. die zu Anfang von Kap. 4.1. genannte Literatur), daß die Fouriertransformierte des Integralkerns, in (4.2.7) also $f(\omega)$, quadratisch integrierbar ist. Dies kann oft eine weitgehende Einschränkung der Klasse von Funktionen sein, die den kausalen Zusammenhang bilden. Stellt man die Bedingung der quadratischen Integrierbarkeit nicht, so gelten ebenfalls Dispersionsrelationen, die jedoch dann keine Hilbert-Transformation mehr sind; Beispiele hierzu findet man bei De Witt, C. und R. Omnes [1960], sowie bei Toll, J.S. [1956]. Die ganz allgemeinen Bedingungen für die Gültigkeit von Dispersionsrelationen finden wir bei Sharnoff, M. [1964] erörtert.

4.3. Komplexe Übertragungsfunktion für lineare Dämpfungsprozesse

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Absorption bzw. die Extinction ein linearer Prozeß sei, daß mithin das Superpositionsprinzip gelte und ein seismischer Impuls also den Regeln der Fouriertransformation (lineare Superposition aus einzelnen Teilwellen^{*)}) genüge und daß schließlich Dispersionsrelationen vom Typ (4.2.19) bzw. (4.2.24) gelten.

Wir gehen aus von der Fourierdarstellung eines seismischen Impulses (wavelets) $w_0(t)$, wobei wir uns an die durch (4.1.5) und (4.1.6) gegebene Form der Fouriertransformation halten:

$$w_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.3.1)$$

Wenn wir $w_0(t)$ als den seismischen Ausgangsimpuls verstehen, so ist $A(\omega)$ das Ausgangsspektrum; $A(\omega)$ ist die Amplitude jeder Teilfrequenz, aus der das wavelet besteht; und da $w_0(t)$ eine reelle Funktion sein soll, muß gelten, daß

$$A(-\omega) = A^*(\omega) \quad (4.3.2)$$

Die Darstellung des Spektrums aus dem Zeitverlauf gibt die zu (4.3.1) inverse Transformation

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.3.3)$$

Wenn wir jetzt die Frage stellen, wie sich der seismische Impuls $w_0(t)$ räumlich im Verlaufe der Zeit ausbreitet und wie er dabei seine Form ändert, so müssen wir unsere Kenntnis über die Ausbreitung jeder Teilwelle, aus denen sich $w_0(t)$ zusammensetzt, einbringen. Jede Teilwelle der Frequenz ω und der Amplitude $A(\omega)$ setzt sich fort, wie es durch (2.1.48) bzw.

^{*)} Gültigkeit der Fourier-Zerlegung nur bei linearen Prozessen: Rodean, H.C. [1971], Kap. 5.

(2.1.51) gegeben ist; dabei ist für $K = K(\omega)$ die Dispersion und in $a = a(\omega)$ die Absorption zu berücksichtigen.

Wir werden jetzt für die Ausbreitung der Teilwellen des seismischen wavelets den Beobachtungsbefund $Q = \text{const}$ einbringen und demgemäß $K(\omega)$ nach (4.2.30) und $a(\omega)$ nach (2.1.61) (vgl. auch S. 91) für $Q = \text{const}$ eintragen; bezeichnen wir jetzt noch - um spätere Verwechslungen mit der Tiefe zu vermeiden - den Laufweg der Welle mit s , so erhalten wir das Spektrum $A_1(\omega)$ für ein wavelet $w_1(t)$ (nach Laufweg s) aus dem Spektrum $A(\omega)$:

$$A_1(\omega) = e^{-i \frac{\omega}{c(s)} \left[1 - \frac{1}{\pi Q} \ln \left(\left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| \right) \right] \cdot s} \cdot e^{-\frac{|\omega|}{2Q \cdot c(s)} \cdot s} \quad (4.3.4)$$

oder, wenn wir als Übertragungsfunktion $U_0(\omega, s)$ die Verknüpfung der Spektren $A_1(\omega)$ und $A(\omega)$ bezeichnen:

$$U_0(\omega, s) = e^{-i \frac{\omega}{c(s)} \left[1 - \frac{1}{\pi Q} \ln \left(\left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| \right) \right] \cdot s} \cdot e^{-\frac{|\omega|}{2Q \cdot c(s)} \cdot s} \quad (4.3.5)$$

Zu beachten ist in dieser Formulierung, daß im Absorptionsterm die Form (2.1.61) für $a(\omega)$ mit $|\omega|$ gebildet wurde; dies hat seinen Grund darin, daß wir ja auch für $A_1(\omega)$ die Bedingung (4.3.2) erfüllen müssen - oder, mit anderen Worten, es muß bei der Ausführung des komplexen Fourierintegrals über positive und negative Frequenzen gewährleistet sein, daß die Amplituden (auch für negative Frequenzen) nur abnehmen und nicht sich aufschaukeln.

Die in (4.3.5) gegebene Übertragungsfunktion U_0 gilt so nur für ein homogenes Medium. Wir betrachten jetzt den Fall, daß sich sowohl $c(s)$ als auch Q mit dem Ort selbst ändern:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= c_0(s) \\ Q &= Q(s) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.6)$$

Dazu betrachten wir eine infinitesimale Wegstrecke ds im inhomogenen Medium:

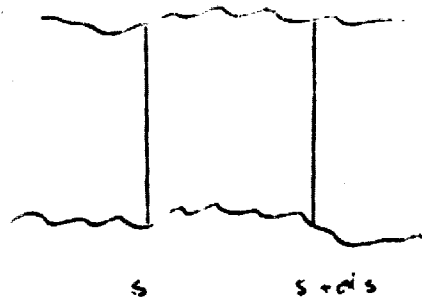


Abb. 10

und wir finden für die Änderung der Übertragungsfunktion im Intervall von s bis $s + ds$:

$$d\tilde{U} = \tilde{U}(\omega, s+ds) - \tilde{U}(\omega, s) \quad (4.3.7)$$

was man mit Kenntnis von (4.3.5) (oder allgemeiner: (2.1.48) bzw. (2.1.51)) schreiben kann als (weil \tilde{U} eine Exponentialfunktion ist):

$$d\tilde{U} = \tilde{U}(\omega, s) \cdot [\tilde{U}(\omega, ds) - 1] \quad (4.3.8)$$

Weil ds infinitesimal ist, läßt sich für $\tilde{U}(\omega, ds)$ der Ausdruck für \tilde{U}_0 (4.3.5) verwenden, wobei man eine Taylorentwicklung ansetzt, die man nach dem ersten Gliede abbricht:

$$d\tilde{U}(\omega, s) = \tilde{U}(\omega, s) \left\{ -i \frac{\omega}{c_0(s)} \left[1 - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{c_0(s)}{c_\infty(s)} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_0(s) c_\infty(s)} \right\} ds \quad (4.3.9)$$

Aus Integration von $\frac{d\tilde{U}}{\tilde{U}}$ von 0 bis L ergibt sich schließlich:

$$\tilde{U}(\omega, L) = e^{-i\omega \left[\int_0^L \frac{ds}{c_0(s)} - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{c_0(s)}{c_\infty(s)} \right) \int_0^L \frac{ds}{c_0(s) c_\infty(s)} \right] - \frac{\omega^2}{2} \int_0^L \frac{ds}{c_0(s) c_\infty(s)}} \quad (4.3.10)$$

Mit dieser allgemeinen Übertragungsfunktion berechnet sich das kausale Zerfließen eines wavelets, die Formänderung, die das wavelet aufgrund von Absorption und Dispersion für ein $Q = \text{const.}$ Gesetz erleidet. Man muß nur das entwickelte Waveletspektrum $A_1(\omega)$ aus dem Referenzspektrum $A(\omega)$ durch

$$A_1(\omega) = \hat{U}(\omega, L) \cdot A(\omega) \quad (4.3.11)$$

berechnen und gemäß (4.3.1) die Zeitfunktion des entwickelten wavelets $w_1(t)$ ermitteln. Die Form (4.3.11) läßt sich natürlich auch im Zeitbereich formulieren; dann hat man ein Konvolutionsintegral stehen:

$$w_1(t, L) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(\tau, 0) \cdot \hat{U}(t - \tau, L) d\tau \quad (4.3.12)$$

wobei dann

$$\hat{U}(\hat{t}, L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\hat{U}(\omega, L)}_{\substack{\uparrow \\ (4.3.10) \quad 62\omega \quad (4.3.4)}} \cdot e^{-i\omega \hat{t}} d\omega \quad (4.3.13)$$

Durch (4.3.12) wird die Formänderung des wavelets infolge Dispersion und Absorption direkt im Zeitbereich beschrieben, wobei man beachten sollte, daß es durchaus denkbar ist - analog zu entsprechenden Entwicklungen in der Optik (z.B. Peterson, C.W. und B.W. Knight [1973]) - Absorptionsbestimmungen, unter Umgehung der ganzen Problematik der numerischen Fouriertransformation, durch Analyse im Zeitbereich auszuführen.

An dieser Stelle sei der Hinweis angebracht, daß die Kenntnis einer allgemeinen Übertragungsfunktion (4.3.10), die die Verformung des seismischen wavelets beschreibt, es erlaubt, einen allgemeinen Dekonvolutionsoperator zu formulieren. Umgekehrt kann aus der Veränderung des Dekonvolutionsoperators, wie er praktisch für verschiedene Teilabschnitte einer seismischen Spur ermittelt wird, die Absorption (d.h. das Q) für die den Zeitabschnitten entsprechenden Tiefenabschnitte bestimmt werden.

Carpenter, E.W. [1966] hat mit einer etwas anderen Dispersionsfunktion $K(\omega)$ statt (4.2.30), die jedoch im gültigen, asymptotischen Bereich $\omega \gg \omega_0$ in die hier benutzte Form übergeht (siehe Futterman, W.I. [1962]), eine Übertragungsfunktion aufzustellen versucht. Seine Funktion erfüllt jedoch nicht die Bedingung, daß

$$U(-\omega, L) = U^*(\omega, L)$$

ist, d.h. daß $A_1(\omega)$ nicht die Bedingung (4.3.2) erfüllt. Bei seinen weiteren Rechnungen geht er dann jedoch auf nur positive Frequenzen ω über, so daß für ihn seine Unterlassung ohne Tragweite ist.

Strick, E. [1970] macht auf eine interessante Erscheinung aufmerksam, wenn man den Durchgang eines seismischen Impulses durch ein $Q = \text{const}$ - Medium mit linearem Verhalten (d.h. Dispersionsrelationen vom Kronig-Kramers-Typ gelten) betrachtet: Die Absorption (und Dispersion) führt nicht nur zu einer Amplitudenverringern und einer Verbreiterung ("Zerfließen") des seismischen Impulses, sondern auch zu einer Verzögerung des Impulsanstiegs ("pedestal effect"). In Unkenntnis dieses Effektes (als der Absorption zugehörig) können die aus der Laufzeit bestimmten seismischen Geschwindigkeiten durchaus bis zu 15 % falsch werden.

Es sei noch angemerkt, daß in der Form der Übertragungsfunktion für inhomogene Medien, also in (4.3.10) das "Additionsgesetz für Absorption", wie es in (2.1.64) bzw. (2.1.62) hergeleitet wurde, enthalten ist; man muß dazu lediglich das Integral im absorptiven Anteil von (4.3.10) in zwei Teile mit jeweils konstantem Q und c_0 zerlegen und beachten, daß $\frac{ds}{c_0(s)} = dt$ ist.

Bei der praktischen Messung eines seismischen Impulses geht außer dem Spektrum des Ausgangsimpulses $A(\omega)$ und der Übertragungsfunktion des Mediums $U(\omega, L)$ noch die Übertragungsfunktion $g(\omega)$ der Aufzeichnungsanlage ein; $g(\omega)$ soll

zusammengefaßt alle Effekte hinsichtlich Phasengang und Amplitude beinhalten, die durch Ankopplung des Seismographen bzw. Geophons an den Boden, die Übertragungscharakteristik des Seismographen bzw. Geophons selbst sowie die der nachgeschalteten Filter beschreiben.

Schließlich ist zu beachten, daß bei allen jenen Signalen, die auf dem Wege von der Quelle zur Aufzeichnung eine Reflexion oder Transmission an Schichtgrenzen erleiden, noch die Übertragungsfunktionen $R(\omega)$ und $D(\omega)$ für alle Reflexionen und Transmissionen eingehen. Für Schichtgrenzen 1. Ordnung kann man bei nicht zu flachen Einfallswinkeln $R(\omega)$ und $D(\omega)$ als frequenzunabhängig ansehen.

Als aufgezeichnetes Signal erhalten wir insgesamt daher folgende Darstellung:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \cdot D(\omega) \cdot g(\omega) \cdot \ddot{u}(\omega, L) \cdot A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad (4.3.14)$$

Zusammenfassend sei angemerkt: Wegen der Frequenzabhängigkeit der Absorption und der zugehörigen Dispersion drückt sich das Absorptionsverhalten eines Mediums nicht einfach durch Amplitudenabnahme des seismischen Signals längs des Laufweges aus. Denn diese frequenzabhängige Absorption (Absorptionskoeffizient frequenzproportional) wirkt selektiv auf das Spektrum des Impulses. Zusammen mit der Dispersion verändert sich daher die Gestalt des Impulses beim Durchlaufen des Mediums, so daß reine Amplitudenuntersuchungen im Zeitbereich sich auf nicht vergleichbare Impulse beziehen würden. Dämpfungsuntersuchungen müssen also stets mit einer genaueren Analyse im Frequenzbereich - unter Verwendung der Übertragungsfunktion (4.3.10) - oder im Zeitbereich nach (4.3.12) ausgeführt werden.

5. Zur Absorption seismischer Wellen im Erdkörper

Nachdem wir nun die mit der Dämpfung seismischer Wellen zusammenhängenden Erscheinungen im Rahmen einer phänomenologischen Theorie erfassen und beschreiben können, wollen wir uns einen Überblick über Methoden und Ergebnisse der Bestimmung der Dämpfung seismischer Wellen im Erdkörper aus der Sicht des Erdbebenseismologen verschaffen.

Wir finden bei Båth, M. [1974], S. 333 ff., eine systematische Zusammenordnung der Methoden, die zur Absorptionsbestimmung der seismischen Wellen im Erdkörper in Betracht gezogen worden sind. Da man hier nur die spektralen Amplitudenbeträge (bzw. die Leistungs-Spektren) betrachtet, fallen alle Effekte aufgrund der Dispersion heraus; von der Möglichkeit, die Dispersion zur Absorptionsbestimmung herauszuziehen, wird nicht Gebrauch gemacht.

Wenn man keine weiteren Annahmen über das Ausgangsspektrum eines Erdbebens machen will (zum mindesten etwa, daß die Spektren verschiedener Erdbeben im Mittel gleich seien), dann muß man sich auf das gleiche Erdbeben beziehen.

Die einfachste Methode, über die Dämpfung im Erdmantel etwas zu erfahren, besteht in der Verwendung von Wellen, die mehrfach zwischen Erdoberfläche und Kern-Mantel-Grenze reflektiert wurden (vgl. Abb. 11); durch Frequenzanalyse der betreffenden

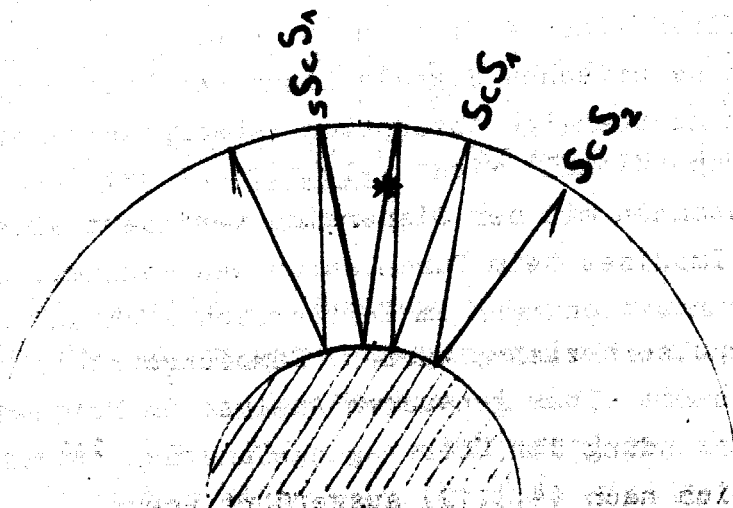


Abb. 11

Einsätze im Seismogramm und ggf. Berücksichtigung der Übertragungsfunktionen der Seismographen (falls man nicht mit einer einzigen Station arbeitet) läßt sich in der Darstellung von (4.3.14) aus dem Signalspektrum alles Unbekannte - wegen des gleichen Laufweges der mehrfachen ScS_n -Phasen - eliminieren und über die Übertragungsfunktion (nach Logarithmieren) die Größe:

$$\int_0^L \frac{ds}{Q(s) c_p(s)} = \int_0^T \frac{dt}{Q} \quad (5.1)$$

ermitteln und aus Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung läßt sich das mittlere, das pauschale Q (im Sinne von (2.1.64)) für den Mantel ermitteln. Andererseits ergibt die Beobachtung der $sScS$ -Phasen das entsprechende mittlere Q für den Weg vom Bebenherd bis zur Erdoberfläche. Gemäß (2.1.64) läßt sich nunmehr das für den Mantel bestimmte mittlere Q auftrennen und das (pauschale) Q oberhalb und unterhalb des Erdbebenherdes bestimmen. Durch Benutzung von Tiefherdbeben in verschiedenen Tiefen läßt sich noch eine gewisse Tiefenabhängigkeit von Q erfassen. Kovach, R.L. und D.L. Anderson [1964] haben diese Methode zunächst an S-Wellen angewendet, weil der Reflexionskoeffizient für S-Wellen an der Mantel-Kern-Grenze 1 ist und damit auch frequenzunabhängig; diese Frage hat Kovach, R.L. [1967] noch einmal untersucht unter der Annahme, daß der (äußere) Erdkern keine ideale, sondern eine viskose ("Maxwell-type") Flüssigkeit sei. Jedenfalls für nahezu senkrechte Inzidenz ist demnach die Reflexion an dieser Mantel-Kern-Grenze als ideal zu betrachten. Die erwähnten Untersuchungen von Kovach und Anderson ergaben für den gesamten Erdmantel ein $Q \approx 600$; während sich für die oberen 600 km ein Q von ≈ 200 ergibt, muß dann der untere Teil des Mantels ein $Q \approx 2200$ haben [Kovach, R.L., 1967]. Hier ergibt sich ein erster Hinweis über eine anomal hohe Absorption im oberen Erdmantel.

Beschränkt man sich nicht auf S-Wellen allein, so kommt die Struktur der Kern-Mantel-Grenze stärker in Betracht [Kanamori, H., 1967].

Grundsätzlich sehr viel detailliertere Aussagen über die Tiefenverteilung der Absorption lassen sich machen, wenn man die direkten Raumwellen eines Erdbebens in verschiedener Entfernung zum Beben spektral zerlegt und miteinander vergleicht (Abb. 12).

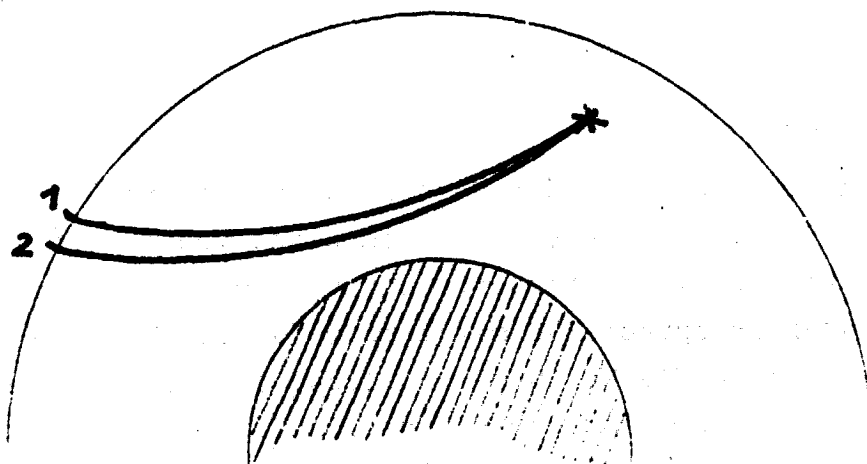


Abb. 12

Liegt die verwendete Stationskette nicht auf einem Großkreis mit dem Erdbeben-Epizentrum, so muß man lediglich die plausible Annahme machen, daß die Erde kugelsymmetrisch aufgebaut sei. Man erhält also durch (quadratischen) Spektrenvergleich (nach Eliminierung der individuellen Instrumentenübertragungsfunktionen der einzelnen Stationen) die integrale Größe (5.1) für verschieden tief in den Erdmantel "eintauchende" Strahlen. Die Ermittlung der Tiefenverteilung von Q bei kugelsymmetrischem Aufbau der Erde erinnert gedanklich an das Wiechert-Herglotz-Verfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung. Diese jetzt skizzierte Methode wurde von Teng, T.L. [1968] angewendet.

Mit Hilfe von am Kern reflektierten P- und S-Wellen von verschiedenen Erdbeben versuchen Duda, S.J. und R. Nortmann [1977] (siehe auch Nortmann, R. [1977]) den Erdmantel speziell unter der europäischen Krustenplatte hinsichtlich der Absorption zu untersuchen und mit den Ergebnissen anderer Autoren für andere Gebiete zu vergleichen. Natürlich muß dazu angenommen

werden, daß keine spektralen Verzerrungen an der Kern-Mantel-Grenze (Reflexionskoeffizienten frequenzunabhängig) auftreten. Es scheint, daß Wellen, die im Mantel unter ozeanischer Kruste gelaufen sind, eine höhere Absorption erleiden als solche, die unter kontinentaler Kruste laufen.

Sieht man von der Möglichkeit der Beobachtung regionaler Unterschiede der Mantelabsorption ab, so lassen sich bis heute die genauesten Untersuchungen über die Tiefenverteilung der Absorption mit Untersuchung von Oberflächenwellen und von Eigenschwingungen des Erdkörpers anstellen, und zwar durch Beobachtung des räumlichen Abklingens der Oberflächenwellen oder des zeitlichen Abklingens der Eigenschwingungen [Anderson, D.L., 1967].

Da die Oberflächenwellen je nach ihrer Wellenlänge das elastische Medium bis in verschiedene Tiefen "ausloten", gibt das räumliche Abklingen verschiedener Perioden der Oberflächenwellen Aufschluß über das bis in verschiedene Tiefen (gewichtet) gemittelte Q ; daneben geht natürlich noch das Geschwindigkeits-Tiefen-Modell ein, welches aber der beobachteten Dispersion der Oberflächenwellen^{*)} angepaßt sein muß. Besonders geeignet zur Untersuchung der Absorption im Erdmantel sind solche Oberflächenwellen, die (bei Anregung durch sehr starke Erdbeben) bei mehreren Umläufen um die Erde beobachtet werden können; hier eliminiert man völlig das Quellenspektrum und den Einfluß lokaler Inhomogenitäten [Anderson, D.L., 1967].

Gleichzeitig werden bei starken Erdbeben Eigenschwingungen des Erdkörpers angeregt; diese zeigen sich aus einer Frequenzanalyse der tagelang beobachteten Oberflächenwellen als Resonanzpeaks. Je nach Typ (sphäroidal oder torsional) und nach Ordnung der Eigenschwingung richtet sich die Verteilung von Knoten- und Bauchflächen im Erdkörper und aus einer Verfolgung des zeitlichen Abklingens der verschiedenen Eigenschwingungstypen ergibt

^{*)} Es sei daran erinnert, daß die Dispersion der Oberflächenwellen ihre Ursache im inhomogenen, geschichteten Aufbau der Erde hat; sie ist also strukturell bedingt.

sich eine dementsprechende Verteilung des Dämpfungsverhaltens in der Erde mit der Tiefe. Auch hier geht natürlich ein Geschwindigkeits-Tiefen-Modell ein, welches aber der Frequenz der einzelnen Eigenschwingungen angepaßt sein muß.

Meist benutzt man die Oberflächenwellen und die Eigenschwingungen zur Absorptionsbestimmung im Erdmantel in einer gemeinsamen Analyse, da sie ohnehin nur zwei verschiedene Aspekte des gleichen Phänomens sind. Dabei ist bemerkenswert, daß man hier - im Vergleich zur oben diskutierten Analyse mit Raumwellen - den Q-Faktor in einem erheblich niederfrequenteren (langperiodischen) Frequenzbereich (typisch 100 ... 400 sec Periodendauer) erfassen kann - und bislang zeichnet sich nicht wesentlich ab, daß Q von der Frequenz abhängig wäre.

Die Methode geht zurück auf Anderson, D.L. und C.B. Archambeau [1964] sowie Anderson, D.L., Ben-Menachem, A. und C.B. Archambeau [1965], wo wir auch ein erstes Tiefenmodell der Absorption (Q) finden; dieses finden wir, zusammen mit einem alternativen Modell, auch bei Anderson, D.L. und R. O'Connell [1967]. Hiernach zeigt der obere Erdmantel, ungefähr im Bereich bis 500 km Tiefe, eine relativ hohe Absorption mit $Q \approx 100$, während der tiefere Teil (nach allmählichem Übergang ab etwa 1000 km Tiefe) eine Größenordnung der Absorption von $Q \approx 500 \dots 1000$ aufweist. Später haben sich Dratler, J., Farrell, W.E., Block, B. und F. Gilbert [1971] mit größter Sorgfalt an die Analyse auch hoher Eigenschwingungen gemacht. Eine mögliche falsche Zuordnung mag eine der Ursachen von Inkonsistenzen mit anderen Autoren sein [Anderson, D.L. und R.S. Hart, 1978]. Das Abklingen jeder einzelnen Resonanz gibt ein Q (vgl. Kap. 2.1: Energieverlust pro Periode) für die jeweilige Frequenz und den betreffenden Eigenschwingungstyp. Ähnlich geht Rault, G. [1975] vor, der durch eine besondere Filtertechnik einzelne Eigenschwingungen sehr sauber untersuchen kann; zur Q-Bestimmung verwendet er nur jene Resonanzen im Spektrum, die wirklich exponentiell mit der Zeit abklingen (zu nicht-exponentiellem Abklingen kann es offenbar durch Resonanzkopplung innerhalb eines

Eigenschwingungsmultiplets kommen). Auch Roult schließt seine Arbeit - wie Dratler, J. et al. [1971] - mit einer Zusammenstellung sehr genauer Q-Werte mit den zugehörigen Eigenschwingungen und ihren Perioden, ohne in eine entsprechende Tiefenverteilung von Q zu invertieren. Eine solche Inversion stellt Deschamps, A. [1977] vor.

Weit allgemeiner sind die Modelle der Tiefenabhängigkeit der Absorption, die wir in einer zusammenfassenden Arbeit von Anderson, D.L. und R.S. Hart [1978] finden; sie bauen auf dem ersten von Anderson, D.L. et al. [1965] entwickelten Modell auf und verwenden auch die oben diskutierten Erkenntnisse über die Absorption aus Raumwellenbeobachtungen.

Schließlich sei in diesem Zusammenhang auf Reiter, L. [1973] hingewiesen, der - angeregt durch eine gewisse Inkonsistenz der Beobachtungsergebnisse verschiedener Autoren - das Problem der Eigenschwingungs-Kopplung und Mode-Conversion und der lateralen Inhomogenitäten behandelt, bzw. im Bild der wandernden Oberflächenwelle, das Problem der Reflexion und Refraktion sowie der Interferenz der reflektierten und refraktierten Wellen mit der originalen Welle.

Eine Zusammenfassung des gesamten bis heute vorliegenden Materials verschiedener Autoren und ein darauf aufbauendes Q-Modell stellen Anderson, D.L. und R.S. Hart [1978] in einem Übersichtsartikel vor. Wir finden hier auch Angaben über die Absorption im Erdkern; die wenigen dazu vorliegenden Messungen scheinen auf eine äußerst geringe Absorption ($Q > 10^4$) im äußeren Erdkern hinzudeuten, während die Absorption im inneren Kern auf Q-Werte von $Q \approx 100 \dots 500$ hinweist. Besonders interessant ist die Beobachtung, daß an der Mantel-Kern-Grenze eine Zone von der Größenordnung 100 ... 200 km Dicke existiert, die sich durch ein bemerkenswert niedriges Q (im Vergleich zum darüber liegenden Mantel und dem darunter liegenden Kern) auszeichnet; Q-Werte der Größenordnung 100 ... 200 scheinen typisch (vgl. auch Teng, T.L. [1968]). Die Ursache dafür mag in einer

lamellenartig geschichteten Geschwindigkeitsverteilung nahe der Mantel-Kern-Grenze liegen [Nortmann, R., 1977].

Es ist eine weitere Aufgabe, den bemerkenswerten Befund der hohen Absorption im oberen Erdmantel in physikalische und rheologische Größen umzusetzen. Verschiedene Prozesse - bei denen insbesondere die Temperatur eine besondere Rolle spielt - werden zur Interpretation diskutiert; hierzu findet man Übersichtsdarstellungen bei Anderson, D.L. [1967], McKenzie, D.P. [1967] und auch bei Anderson, D.L. und R.S. Hart [1978], sowie Anderson, D.L. und R. O'Connell [1967]; Orowan, E. [1967]; Jackson, D.D. und Anderson, D.L. [1970].

Interessant ist es nun, nach der mit der Absorption der seismischen Wellen im Erdkörper zusammenhängenden Dispersion zu fragen (bei Voraussetzung linearer Absorptionsprozesse). So weisen Liu, H.P., Anderson, D.L. und H. Kanamori [1976] darauf hin, daß die Raumwellen, die Oberflächenwellen und die Eigenschwingungen der Erde jeweils einer Korrektur aufgrund dieser Dispersion bedürfen und daß damit eine Inversion dieser Daten in ein Geschwindigkeits-Tiefen-Modell ein Absorptions-Tiefen-Modell mit einschließen muß, um die jeweils richtigen Geschwindigkeitskorrekturen anzubringen. Die Korrekturen, die an Eigenschwingungsfrequenzen und an langperiodischen Oberflächenwellen angebracht werden müssen, um die daraus hergeleitete Geschwindigkeitsverteilung mit der aus Raumwellen hergeleiteten zu vergleichen, liegen in der Größenordnung von 1 %, was um ein Vielfaches größer ist als die Ungenauigkeiten der Messungen [Hart, R.S. und D.L. Anderson, 1977; Anderson, D.L. und R.S. Hart, 1976]. Eine Erörterung im Sinne einer auf physikalischer (kausaler) Dispersion beruhenden Korrektur haben H. Kanamori und D.L. Anderson [1977] vorgenommen. Daß die doch schwache Dispersion - gemäß (4.2.30) bzw. (4.2.33) -, die nur logarithmisch von der Frequenz abhängt, eine solche Rolle spielt, liegt daran, daß die Perioden, auf die sich die Raumwellenbeobachtungen beziehen (um 10 sec) und die, auf denen Oberflächenwellen- und Eigenschwingungsbeobachtungen beruhen (größer als 1000 sec),

ein sehr weites Frequenz-"band" überstreichen [Anderson, D.L., Kanamori, H., Hart, R.S. und H.P. Liu, 1977]. Anderson, D.L. et al. [1977] stellen ein Modell der Scherwellengeschwindigkeits-Tiefen-Verteilung mit und ohne Dispersionskorrektur (welche sie auf der Basis eines Q-Modells von Anderson, D.L. et al. [1965], "MM8", berechnen) vor und zeigen, daß die Dispersionskorrektur zu einer generellen Anhebung der Scherwellengeschwindigkeit führt. Damit würden gewisse Diskrepanzen zwischen Geschwindigkeitsmodellen aus Eigenschwingungsbeobachtung und aus Raumwellenbeobachtung ausgeräumt werden, die zuvor tiefreichenden Unterschieden im Aufbau des Erdmantels unter ozeanischer und kontinentaler Kruste zugeschrieben wurden. Schließlich weisen Anderson, D.L. et al. [1977] darauf hin, daß auch Labormessungen der seismischen Geschwindigkeiten bzw. der elastischen Moduln, die im allgemeinen im Ultraschallbereich ausgeführt werden, einer solchen Dispersionskorrektur unterzogen werden müssen, wenn man die Messungen auf das seismische Frequenzband übertragen will. Anders steht es dagegen bei quasistatischen Laborversuchen, wie sie von Brennan, B.J. und F.D. Stacey [1977] berichtet werden; hier wurde direkt die Frequenzabhängigkeit des elastischen Moduls $\mu_R = \mu_R(\omega)$ im seismischen Frequenzbereich (0,001 Hz ... 1 Hz) für einen Basalt und einen Granit gemessen und man findet genau den logarithmischen Zusammenhang (4.2.30), wie er zu erwarten ist (zwischen $\mu_R(\omega)$ und $K(\omega)$ gilt für schwache Absorption ein linearer Zusammenhang, (4.2.17)). Damit ist im Laborversuch die Dispersion der seismischen Wellen direkt nachgewiesen.

Die Berücksichtigung der Dispersionskorrektur an den seismischen Phasengeschwindigkeiten wird von hervorragender Bedeutung, wenn man die Frage nach regionalen Unterschieden der seismischen Geschwindigkeit im Erdmantel stellt und daraus Schlüsse auf die physikalischen regionalen Unterschiede ziehen will. Nakanishi, I. [1978] zeigte mit einer simultanen Bestimmung des regionalen Q und der regionalen Phasengeschwindigkeit, daß - zumindest im Falle der von ihm untersuchten 9 Azimutbereiche - die regionalen (azimutalen) Phasengeschwindigkeitsvariationen sich allein aus der Dispersion infolge regionaler Q-Variation erklären lassen.

6. Reflexion und Transmission elastischer Wellen an Schichtgrenzen bei Absorption

Bevor wir uns - nach den Betrachtungen der Dämpfung seismischer Wellen im Erdkörper - der Dämpfung in der Erdkruste zuwenden, die auch für die Prospektionsgeophysik von besonderem Interesse ist (als zusätzlicher lithologischer Parameter bei der Interpretation von Seismogrammen), müssen wir uns noch näher mit den Übertragungseigenschaften bei Reflexion und Transmission, $R(\omega)$ und $D(\omega)$ befassen. Denn sie spielen in der seismischen Erkundung der Erdkruste, insbesondere in der Reflexionsseismik, eine bedeutende Rolle und treten, gemäß (4.3.14) im Spektrum des seismischen Impulses direkt auf. Dabei interessiert hier weniger der absolute Betrag der Transmissions- und Absorptionskoeffizienten, sondern deren mögliche Frequenzabhängigkeit; denn der absolute Betrag bedeutet - genauso wie frequenzunabhängige D - und R -Koeffizienten - für den spektral zerlegten seismischen Impuls $s(\omega)$ lediglich einen Amplitudenfaktor, der den Maßstab des Spektrums bestimmt. Bei unserem Interesse für die Absorption des Mediums, die in der Übertragungsfunktion enthalten ist, ist jedoch der Verlauf des Spektrums - bzw. der Übertragungsfunktion - mit der Frequenz wichtig. Unter diesem Gesichtspunkt wollen wir die Frage nach der Frequenzabhängigkeit von Transmissions- und Reflexionskoeffizienten stellen.

Die Berechnung der Reflexions- und Transmissionsverhältnisse an der Grenze zweier elastischer Medien geschieht ganz analog zum entsprechenden Problem in der Optik ("Fresnel'sche Formeln"). Allerdings wird in der Elastizitätstheorie alles erheblich komplizierter, da an der Grenzfläche sich Scherungswellen (S) zum Teil in Kompressionswellen (P) umwandeln und umgekehrt. Die Wellenansätze beiderseits der Grenzfläche werden daher durch entsprechend vermehrte Randbedingungen miteinander verkoppelt.

Die Verhältnisse an der Grenzfläche zweier ideal elastischer Medien hat - für die Anwendung auf seismische Fragestellungen - wohl Blut, H. [1932] als erster systematisch untersucht und die

Winkelabhängigkeit der gebrochenen und der reflektierten Energieanteile ausgerechnet. Ganz ähnlich sind die Rechnungen von Slichter, L.B. und V.G. Gabriel [1933], die sich auf die Verhältnisse an der Conrad- und der Moho-Diskontinuität - soweit damals bekannt - beziehen und für einen an diesen Grenzflächen vorgegebenen Dichte- und Geschwindigkeitskontrast Reflexion und Transmission berechnen; eigentliches Ziel ihrer Untersuchung war die Frage nach möglichen "internen" multiplen Reflexionen zwischen diesen Grenzflächen. Muskat, M. und M.W. Meres [1940] haben in tabellarischer Form Reflexion und Transmission als Funktion des Winkels ausgerechnet, wobei als Parameter der Dichtekontrast und der Geschwindigkeitskontrast variiert wurden. Diese Arbeit ist daher für die meisten auftretenden Fälle der Praxis ausführlich und ausreichend genug, um sich ein Bild über die Reflexion, Transmission und gegenseitige Konversion der elastischen Wellen bei gegebenen Grenzflächenparametern zu machen. Die Möglichkeiten der modernen numerischen Rechnungen haben Tooley, R.D., Spencer, T.W., Sagoci, H.F. [1965] dazu verwendet, eine noch entsprechend detailliertere Analyse, allerdings nur für P-Wellen, vorzustellen; während Muskat und Meres für beide Medien eine Poissonzahl ν von 0.25 festhalten, geben die erweiterten numerischen Möglichkeiten Tooley et al. die Möglichkeit, auch die Poissonzahl zu variieren und so z.B. auch die Grenzfläche eines festen Mediums an eine Flüssigkeit ($\nu = 0,5$) zu betrachten. Mehr den physikalischen Hintergrund der Übertragungseigenschaften einer Grenzfläche zwischen zwei elastischen Medien finden wir in der Monographie von Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. und F. Press [1957] sowie bei Sawarenski, E.F. und D.P. Kirnos [1960] beleuchtet.

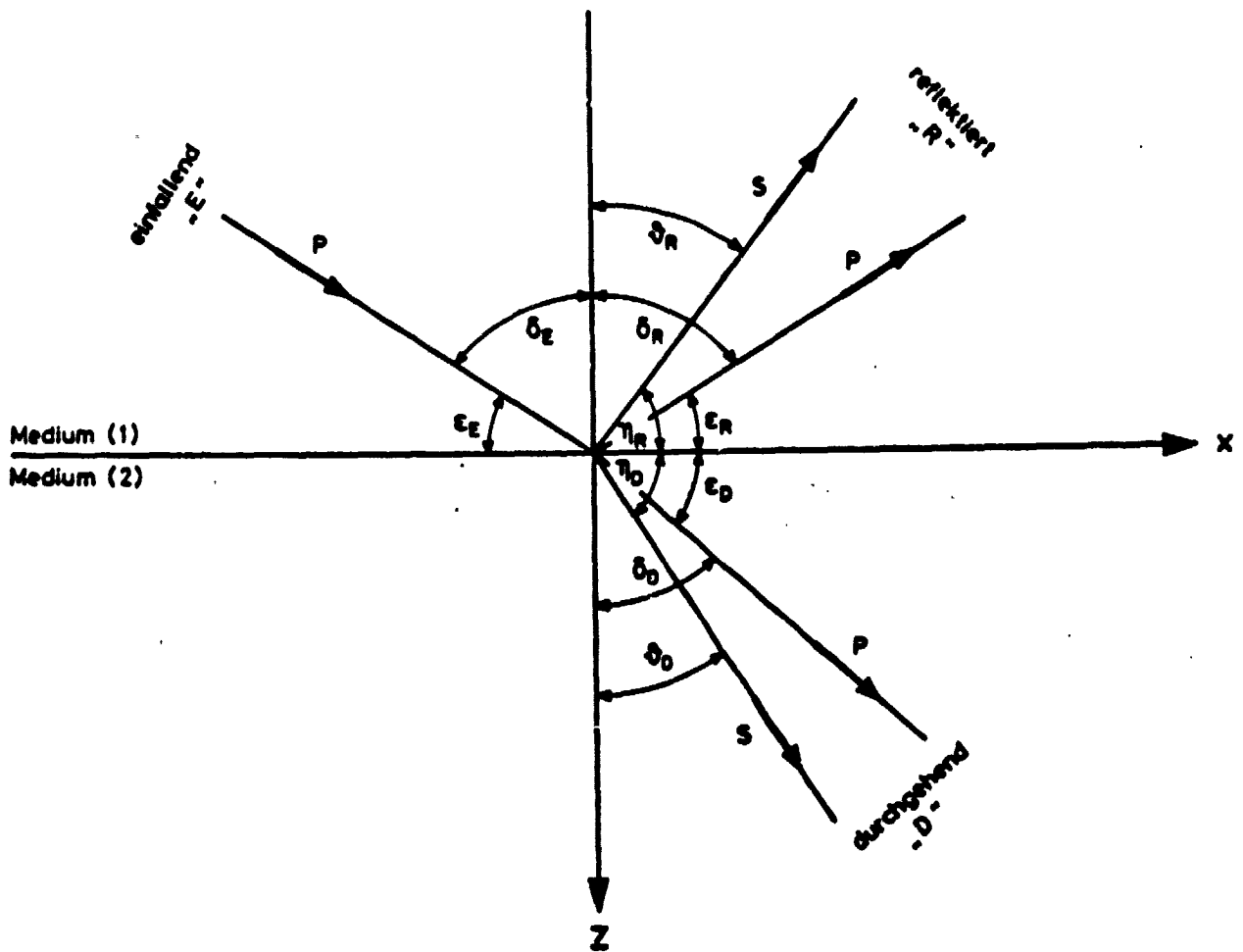
Für die uns hier interessierende Fragestellung sind diese Arbeiten nur mehr vom Methodischen her von Bedeutung. Denn die Reflexion, Transmission und Konversion elastischer Wellen an der Kontaktfläche ideal-elastischer Medien ist unabhängig von der Frequenz der Welle; für feststehende elastische Parameter in beiden Halbräumen und für festen Einfallswinkel sind diese Größen feste Zahlen.

Dagegen werden die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an der Grenzfläche zweier Medien dann frequenzabhängig, wenn die Medien eine (frequenzabhängige) Absorption - und damit verbunden eine (frequenzabhängige) Wellengeschwindigkeit (Dispersion) - zeigen. Dies wirkt sich für das Wavelet nicht nur hinsichtlich des Amplitudenspektrums, sondern auch, infolge eines frequenzabhängigen Phasensprungs an der Grenzfläche, auf das Phasenspektrum aus. Für die Verformung eines seismischen Impulses durch ein absorbierendes Medium ist also nicht allein die komplexe Übertragungsfunktion $\hat{U}(\omega, L)$ maßgebend, sondern auch der Einfluß der - nunmehr komplexen - frequenzabhängigen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten möglicher Grenzflächen.

Bei der Behandlung des Problems von Reflexion und Brechung an einer Grenze zwischen absorbierenden Medien kommt es zu besonderen, bemerkenswerten Erscheinungen bei der Wellenausbreitung, die in vereinfachter Form aber bereits von der Metalloptik her bekannt sind. Die grundsätzliche Behandlung des Problems folgt dem "klassischen" Weg für die ideal-elastischen Medien, wobei wir nun jedoch im Sinne von (2.1.50) die Wellenzahl komplexwertig definieren und so die Absorption mit beschreiben. Demgemäß folgen wir den Darstellungen von E.F. Sawarenski und D.P. Kirnos [1960], S. 127 ff., und W.M. Ewing, W.S. Jardetzky und F. Press [1957]. Wenn wir andererseits die mit der Absorption verbundenen Wellenausbreitungsphänomene an der Grenzfläche im Auge haben, so mögen wir den Darstellungen der Metalloptik folgen (z.B.: D.S. Jones [1964], S. 322 ff.; W. Macke: Wellen [1962], S. 302 ff.; M. Born [1972], S. 262 ff.; A. Sommerfeld: Optik [1964], S. 28 ff.; J.A. Stratton [1941], S. 482 ff.).

Da an der Grenzfläche sich Transversalwellen und Longitudinalwellen teilweise ineinander umwandeln, müssen beide Wellentypen von Anfang an gleichzeitig im allgemeinen Ansatz mit enthalten sein (würde man dies nicht tun, z.B. nur eine "Sorte" von Wellen zulassen - die Metalloptik hat diese einfacheren Verhältnisse - so gelänge es später nicht, die Grenzbedingungen zu

erfüllen). Die folgende Abbildung 13 soll die in den Rechnungen verwendeten Symbole definieren und verdeutlichen; die Grenzfläche sei die x-y-Ebene, die Ausbreitungsrichtungen, angegeben durch die $\vec{\gamma}$ -Vektoren der (ebenen) Wellen sollen in der x-z-Ebene liegen, also keine y-Komponente haben.



P = Longitudinalwelle : $\epsilon, \delta, L, a, A$
 S = Transversalwelle : η, ϕ, T, b, B

Abb. 13

Die Abbildung ist für den Fall einer einfallenden Longitudinalwelle gezeichnet; ganz Entsprechendes gilt, wenn eine Transversalwelle auf die Grenzfläche trifft.

Zur Bezeichnung und Schreibweise der Wellenzahlvektoren sei folgendes vereinbart:

Unter einem komplexen Wellenzahlvektor ("Ausbreitungsvektor") wollen wir das Produkt der komplexen Wellenzahl \vec{k} (diese ist - gemäß (2.1.50) - ein durch die elastischen Moduln bestimmter komplexer Skalar) mit dem Einheitsvektor der Ausbreitungsrichtung verstehen.

Wenn wir dann vom Betrag des Wellenzahlvektors $|\vec{k}|$ sprechen, meinen wir die "skalare Länge" des Vektors, die hier also komplex ist

$$|\vec{k}| = \vec{k} = k - i\alpha$$

also nicht den "Betrag der komplexen Zahl", der durch $(\vec{k} \cdot \vec{k}^*)^{1/2} = (k^2 + \alpha^2)^{1/2}$ gegeben wäre, es sei denn, es ist ausdrücklich angegeben, daß diese letztere (reelle) Zahl gemeint ist.

Diese Vereinbarung entspricht der Auftrennung in komplexe Wellenzahl und Einheitsvektor der Ausbreitung etwa bei Stratton, J.A. [1941], S. 490 ff.

Die durchgehenden und die reflektierten Wellen \vec{u}_D und \vec{u}_R (durch ihre Verschiebungsvektoren dargestellt) müssen - wie begründet - sowohl longitudinale ("a") wie transversale ("b") Anteile enthalten; daraus ergeben sich folgende Ansätze:

$$\vec{u}_D = \vec{a}_D \cdot e^{-i(\vec{k}_D^{(D)} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{b}_D \cdot e^{-i(\vec{k}_D^{(D)} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.1)$$

$$\vec{u}_R = \vec{a}_R \cdot e^{-i(\vec{k}_R^{(R)} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{b}_R \cdot e^{-i(\vec{k}_R^{(R)} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.2)$$

Dagegen muß man für die einfallende Welle nur entweder eine Longitudinal- oder eine Transversalwelle annehmen, da die Lösung des Problems für ein Gemisch aus beiden einfach durch

die entsprechend der Einfallsamplituden gewichtete Summe der Lösungen der Einzelprobleme entsteht. Für die einfallende Welle setzen wir also zwei Möglichkeiten an:

$$\vec{u}_E = \begin{cases} \vec{a}_E \cdot e^{-i(\vec{k}_L^{(E)} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{b}_E \cdot e^{-i(\vec{k}_T^{(E)} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{cases} \quad (6.3)$$

Dabei sind die Amplitudenvektoren der Longitudinalanteile \vec{a} zum jeweiligen \vec{k}_L parallel:

$$\vec{a} = a \cdot \vec{k}_L \quad (6.4)$$

während für die Transversalanteile \vec{b} gilt:

$$\vec{b} \cdot \vec{k}_T = 0 \quad (6.5)$$

Die Verknüpfung der Wellen untereinander geschieht mit den Stetigkeitsbedingungen der Grenzfläche:

- 1.) Auf beiden Seiten der Grenzfläche sollen die Deformationen gleich sein, d.h. die Schichten sollen weder aneinander gleiten können (kein Schlupf), noch sollen Hohlräume durch mangelnde Haftung entstehen können:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}(\text{Medium 2}) &= \vec{u}(\text{Medium 1}) && \text{für } z = 0 \\ \text{also:} &&& \\ \vec{u}_D(z=0) &= \vec{u}_E(z=0) + \vec{u}_R(z=0) \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

- 2.) An der Grenzfläche müssen die Kräfte im Gleichgewicht sein, die Schichtgrenze ist kein Sitz von Quellen von Kräften (d.h. von Spannungen)*):

*) Man beachte die Bedeutung von σ_{ik} gemäß (2.1.4): σ_{ik} ist die Kraft (pro Flächenelement) in Richtung i , die an der Fläche, welche durch Normalenrichtung k gegeben ist, wirkt. σ_{xz} ist also eine in x -Richtung weisende und an einer zur x - y -Ebene parallelen Fläche (z ist Normale) angreifende Spannung.

a) für die Scherspannungen

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}(\text{Medium 2}) &= \tau_{yz}(\text{Medium 1}) \text{ für } z=0 \\ \text{also:} \\ \tau_{yz}^{(D)}(z=0) &= \tau_{yz}^{(E)}(z=0) + \tau_{yz}^{(R)}(z=0) \end{aligned} \right\} (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}(\text{Medium 2}) &= \tau_{xz}(\text{Medium 1}) \text{ für } z=0 \\ \text{also:} \\ \tau_{xz}^{(D)}(z=0) &= \tau_{xz}^{(E)}(z=0) + \tau_{xz}^{(R)}(z=0) \end{aligned} \right\} (6.8)$$

b) für die Normalspannungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(\text{Medium 2}) &= \sigma_{zz}(\text{Medium 1}) \text{ für } z=0 \\ \text{also:} \\ \sigma_{zz}^{(D)}(z=0) &= \sigma_{zz}^{(E)}(z=0) + \sigma_{zz}^{(R)}(z=0) \end{aligned} \right\} (6.9)$$

Die Gleichung (6.6) ist eine vektorielle Gleichung, also besteht sie - genau genommen - aus drei skalaren Gleichungen. Die Bedingungen (6.7), (6.8) und (6.9) sind zwar für sich skalare Gleichungen, sie greifen jedoch zurück auf verschiedene Komponenten von \vec{u} , und zwar in nicht ganz einfacher Weise (Hooke'sches Gesetz (2.1.12) mit verallgemeinerten Lamé'schen Konstanten und Definition des Deformationstensors durch (2.1.3)). Die Erfüllung der Grenzbedingungen für die vektorielle Welle, die sowohl longitudinale wie transversale Anteile enthält, gestaltet sich daher auf direktem Wege als formal sehr kompliziert. Daher ist es zweckmäßig, jede nur mögliche Vereinfachung des Problems auszunutzen; deshalb gehen wir von den Verrückungen \vec{u} zu den elastischen Potentialen über:

Wir denken uns die Lösung \vec{u} gemäß (2.1.43) aufgespalten und definieren ein Potential ϕ so, daß

$$\vec{u}_2 = - \text{grad } \phi \quad (6.10)$$

gesetzt wird; damit wird $\text{rot } \vec{u}_2 = 0$ (2.1.45) erfüllt. Außerdem definieren wir ein Vektorpotential \vec{A} so, daß

$$\vec{u}_1 = \text{rot } \vec{A} \quad (6.11)$$

gesetzt wird; damit wird $\text{div } \vec{u}_1 = 0$ (2.1.44) erfüllt.

Ferner setzen wir (vgl. Abb. 13) $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$, d.h. die Ausbreitungsvektoren der einzelnen Wellen sollen in der x-z-Ebene liegen.

Für die Welle $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ steht dann:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= - \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ u_y &= - \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ u_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Statt der drei Größen u_x, u_y, u_z betrachten wir im folgenden die drei neuen Größen

$$\left. \begin{aligned} \phi \\ A_y \equiv z_+ \quad (\text{Umbenennung}) \\ u_y \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Aus der Wellengleichung (2.1.20) erhalten wir jetzt unter Streichung der Inhomogenitäten (Volumenkräfte), die für die Wellenausbreitung ohne Belang sind:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \phi \quad (6.14)$$

sowie

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \text{rot} \cdot \text{rot } \vec{A} \quad (6.15)$$

Betrachten wir die y-Komponente der (vektoriellen) Wellengleichung für das Vektorpotential \vec{A} , so folgt unter Beachtung von (6.13) und von $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$:

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mu \Delta \varphi \quad (6.16)$$

während die Wellengleichung für u_y direkt aus (2.1.20) folgt:

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \mu \Delta u_y \quad (6.17)$$

Wir erinnern an dieser Stelle daran, daß wir zur Berücksichtigung der Absorptionseigenschaften die λ und μ komplexwertig anzunehmen haben.

Anstatt der sechs Wellengleichungen für \vec{u}_1 und \vec{u}_2 (für die Longitudinalwelle und die Transversalwelle) beschreiben wir beide Wellentypen nun durch insgesamt drei Wellengleichungen, nämlich (6.14), (6.16) und (6.17). Denkt man sich die Lösung jede dieser Gleichungen vom Typ

$$\varphi, \varphi, u_y \sim e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.18)$$

und berechnet mit (6.10) und (6.11) das zugehörige \vec{u} , so erkennt man, daß das Potential φ eine Longitudinalwelle beschreibt, denn es wird

$$\vec{u}_2 \sim \vec{k} \cdot \varphi \quad (6.19)$$

während $v (= A_y)$ und u_y je eine Transversalwelle beschreiben. Aus v wird:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -k_z \cdot \varphi \\ 0 \\ k_z \cdot \varphi \end{pmatrix} = \vec{k} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Das Potential φ beschreibt also eine in der x-z-Ebene schwingende (polarisierte) Transversalwelle. Dieser Wellentyp wird als "SV-Welle" (S-vertikal) bezeichnet. Dagegen schwingt die mit u_y beschriebene Welle in der y-Richtung; sie wird als "SH-Welle" (S-horizontal) bezeichnet.

Aus den Randbedingungen für \vec{u} (6.6) bis (6.9) müssen jetzt diejenigen für die Potentiale hergeleitet werden. Der Index "1" bzw. "2" soll sich auf das betreffende Medium beziehen, so daß wir also schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_E - \varphi_R \\ z_1 &= z_E + z_R \\ u_{y1} &= u_y^{(E)} + u_y^{(R)} \\ \varphi_2 &= \varphi_2 \\ z_2 &= z_2 \\ u_{y2} &= u_y^{(D)} \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Aus Randbedingung (6.6) folgt (komponentenweise) für die Grenzfläche ($z = 0$):

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial z_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial z_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad (6.23)$$

$$u_{y1} = u_{y2} \quad (6.24)$$

Aus den Kräftegleichgewichten folgt mit Verwendung des Hooke'schen Gesetzes (2.1.12):

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(- \frac{\partial^2 z_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right) \\ = \mu_2 \left(- \frac{\partial^2 z_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 + 2\mu_1) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) \\
 = (\lambda_2 + 2\mu_2) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial z} \quad (6.27)$$

Damit stehen 6 Randbedingungen ((6.22) bis (6.27)) für die 6 Größen

$$\varphi_1, \varphi_2, u_{y1}, u_{y2}, \varphi_1, \varphi_2, u_{y1}, u_{y2}$$

bereit. Als vorgegeben ist von den mit "1" indizierten Größen gemäß (6.21) jeweils nur der Anteil, der der einfallenden Welle zugeordnet wird, zu betrachten.

Sinngemäß zu den Verrückungen sind jetzt Ansätze für die elastischen Potentiale beiderseits der Grenzfläche zu treffen. Da nun in denjenigen Randbedingungen, in denen die Potentiale φ bzw. ψ auftreten, diese stets gemeinsam vorkommen, die Randbedingungen hinsichtlich φ und ψ also nicht entkoppelt sind, muß der Ansatz für die Potentiale beiderseits der Grenzschicht jeweils sowohl φ wie auch ψ enthalten. Physikalisch kommt hier zum Ausdruck, daß eine einfallende Longitudinalwelle sowohl eine Longitudinal- als auch eine Transversalwelle vom SV-Typ in Reflexion und in Transmission enthält; Entsprechendes gilt für eine einfallende SV-Transversalwelle. Lediglich die SH-Welle ist entkoppelt: eine SH-Welle bleibt SH-Welle bei Reflexion und Transmission.

Wir setzen für die Potentiale als Lösungen der Wellengleichungen (6.14), (6.16), (6.17) also, entsprechend (6.21), an:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = A_E \cdot e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + A_R \cdot e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\
 \varphi_2 = B_E \cdot e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} + B_R \cdot e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}
 \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = B_E \cdot e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + B_R \cdot e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\
 \varphi_2 = C_E \cdot e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} + C_R \cdot e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}
 \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\varphi_2 = A_D e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.30)$$

$$\varphi_2 = B_D e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.31)$$

In der folgenden Tabelle sollen nochmals die Bezeichnungen für die Potentiale der Einzelwellen zusammengestellt werden:

	einfallend/durchgehend	reflektiert
longitudinal	$\vec{k}(k_L, a); A_E, A_D; \delta_E, \delta_D$	$\vec{c}_T(k_L, a); A_R, \delta_R$
transversal SV	$\vec{x}(k_T, b); B_E, B_D; \vartheta_E, \vartheta_D$	$\vec{\gamma}(k_T, a); B_R, \vartheta_R$

Die Wellenzahlvektoren $\vec{k}, \vec{c}_T, \vec{x}, \vec{\gamma}$ sind wegen der Annahme komplexer elastischer Moduln ja komplex. Da im gleichen Medium die Materialkonstanten aber den Betrag des Wellenzahlvektors (die Wellenzahl) festlegen, gilt:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{k}| = k_1 = |\vec{c}_T| = c_{T1} = k_{L1} - i a_1 \\ |\vec{\gamma}| = \gamma_1 = |\vec{x}| = x_1 = k_{T1} - i b_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Bevor wir nun die Ansätze für φ und ψ mit Hilfe der Grenzbedingungen verknüpfen, betrachten wir das Eikonal $\vec{k} \cdot \vec{r}$ (und das Entsprechende für die anderen Wellen):

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_z z = k \sin \chi \cdot x + k \cos \chi \cdot z \quad (6.33)$$

wobei χ für irgendein δ oder ϑ steht und berücksichtigt wurde, daß

$$k_y = 0 \quad (6.34)$$

sein soll (Ausbreitung nur in der x-z-Ebene). An der Grenzfläche $z = 0$ bleibt von (6.33) nur der erste Summand stehen.

Fall 1:

Es soll eine Longitudinalwelle einfallen, d.h.

$$B_E \equiv 0 \quad (6.35)$$

Randbedingung (6.22) liefert dann ($z = 0$):

$$\begin{aligned} B_R \gamma_{1z} \cdot e^{-i\gamma_{1z} \cdot x} + A_E \cdot k_{1x} \cdot e^{-i k_{1x} \cdot x} + A_R \gamma_{1x} \cdot e^{-i \gamma_{1x} \cdot x} \\ = B_D x_{2z} \cdot e^{-i x_{2z} \cdot x} + A_D k_{2x} \cdot e^{-i k_{2x} \cdot x} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die Randbedingung muß für die gesamte Grenzfläche, also für alle x , erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn

$$k_{1x} = k_{2x} = \gamma_{1x} = x_{2x} = \gamma_{1x} \quad (6.37)$$

ist. Verwenden wir die gegen das Lot genommenen Winkel, schreiben also z.B.

$$k_x = k \cdot \sin \delta \quad (6.38)$$

und entsprechend für γ_{1x} , x_{2x} , γ_{1x} , so schreibt man (6.37) auch in folgender Form an:

$$k_1 \cdot \sin \delta_E = k_2 \cdot \sin \delta_D = \gamma_1 \cdot \sin \delta_R = x_2 \cdot \sin \delta_D = \gamma_1 \cdot \sin \delta_R \quad (6.39)$$

wobei ja, nach (6.32), $\gamma_1 = k_1$ ist.

Beachten wir, daß die Wellenzahlen $k_1, k_2, \kappa_2, \gamma_1$ alle komplexwertig sind, sowie sowohl hinsichtlich ihrer Real- als auch Imaginärteile durch die Materialparameter vorgegeben sind ((2.1.47) und (2.1.50)) und daß schließlich noch δ_E als Einfallswinkel fest vorgegeben ist, so erkennen wir, daß (6.39) nur erfüllt werden kann, wenn die sinus der Winkel komplex angesetzt werden. Denn (6.39) stellt ja zwei unabhängige Gleichungen durch Auftrennung nach Real- und Imaginärteil dar.

Ohne Absorption wären alle Wellenzahlen reell und (6.39) würde, wegen $K = \frac{\omega}{c}$, in das gewöhnliche Snellius'sche Brechungsgesetz übergehen:

$$\frac{\sin \delta_E}{c_{L1}} = \frac{\sin \delta_D}{c_{L2}} = \frac{\sin \delta_R}{c_{L1}} = \frac{\sin \delta_D}{c_{T2}} = \frac{\sin \delta_R}{c_{T1}}$$

Physikalisch interpretiert besagt dies ja nichts weiter, als daß die "Scheingeschwindigkeit" $\frac{c}{\sin \delta}$ mit der sich die von der einfallenden Welle an der Grenzfläche erzeugte Störung längs dieser fortbewegt, für beide Seiten der Grenzfläche und für alle Wellentypen gleich sein muß.

Das Komplexwerden der sinus von Reflexions- und Transmissionswinkel hat interessante Erscheinungen zur Folge:

- (a) Wir betrachten zunächst eine ebene Welle mit reellem Ausbreitungswinkel χ und komplexem \vec{k} , etwa die einfallende Welle; unter Verwendung von (6.33) und (6.34):

$$\left. \begin{aligned} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} &= e^{-i(k \sin \chi \cdot x + k \cos \chi \cdot z)} \\ &= e^{-i k (x \sin \chi + z \cos \chi)} = e^{-a(x \sin \chi + z \cos \chi)} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Die Gleichung der Flächen konstanter Phase dieser gedämpften Welle ist durch Konstantsetzen^{*)} des "Wellenanteils"

^{*)} Genaugenommen:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = 0$$

also

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t = \text{const}$$

des Eikonals zu finden:

$$K(\sin \chi \cdot x + \cos \chi \cdot z) = \text{const} \quad (6.41)$$

Diese Ebenenschar hat den Normalenvektor

$$\vec{n}_r = k \begin{pmatrix} \sin \chi \\ 0 \\ \cos \chi \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

der die Ausbreitungsrichtung angibt und dessen Betrag die Wellenzahl ist.

Aufgrund der Absorption, beschrieben durch den Absorptionskoeffizienten a , nimmt die Amplitude der Welle mit der Entfernung ab. Die Flächen gleicher Amplitude sind im Falle von (6.40) gegeben durch

$$a(\sin \chi \cdot x + \cos \chi \cdot z) = \text{const} \quad (6.43)$$

und sind ebenfalls Ebenen, deren Normalenvektor

$$\vec{n}_i = a \begin{pmatrix} \sin \chi \\ 0 \\ \cos \chi \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

ist; er gibt die Richtung des Gradienten der Amplitude (Richtung der Amplitudenabnahme) an. Diese ist in diesem Falle mit der Ausbreitungsrichtung (6.42) gleich, d.h. die Amplitude dieser Welle nimmt infolge der Absorption in der Richtung der Wellenausbreitung ab, die Welle ist

"längsgedämpft". Der Betrag von \vec{n}_i gibt die "Eindringtiefe" der Welle an.

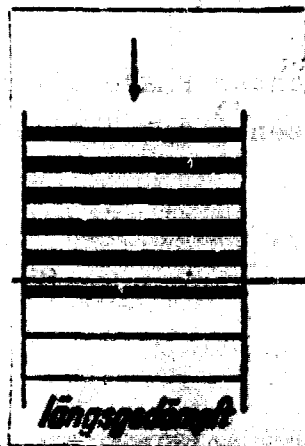


Abb. 14

- (b) Wir erweitern unsere Betrachtungen jetzt auf den durch die komplexe Gleichung (6.39) aufgezeigten Fall, daß die Sinus der Winkel, und damit die Winkel selbst, komplex anzunehmen sind. Wir setzen

$$\sin \chi = \alpha + i\beta \quad (6.45)$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \sqrt{1 - \sin^2 \chi} = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta} \\ &= \mu + i\nu \end{aligned} \quad (6.46)$$

wobei μ der Realteil und ν der Imaginärteil des komplexen $\cos \chi$, dargestellt durch die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl, bedeuten soll, welche durch α und β festgelegt sind. Somit wird - entsprechend zu (6.40) -

$$\begin{aligned} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} &= e^{-i(k \sin \chi \cdot x + k \cos \chi \cdot z)} \\ &= e^{-i[(k\alpha + a\beta)x + (k\mu + a\nu)z]} = e^{-(k\beta - a\alpha)x - (k\nu - a\mu)z} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Die Ebenen konstanter Phase werden jetzt durch den Normalenvektor

$$\vec{n}_r = \begin{pmatrix} k\alpha + a\beta \\ 0 \\ k\mu + a\nu \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

beschrieben; er definiert die Ausbreitungsrichtung der Welle, sein Betrag gibt die Wellenzahl (räumliche Periodizität) an.

Die Ebenen konstanter Amplitude werden jetzt durch einen anderen Normalenvektor, nämlich durch

$$\vec{n}_i = \begin{bmatrix} k_\beta - \alpha \alpha \\ 0 \\ k_\gamma - \alpha \beta \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

beschrieben; er gibt den Gradienten der Amplitude, also die "Dämpfungsrichtung" an. Da diese Richtung nicht mit der Ausbreitungsrichtung zusammenfällt, nennt man solche Wellen "schräggedämpft". Dies Phänomen ist aus der Metalloptik bekannt, jedoch ist dort die Absorption (im Metall) so groß, daß man die schräggedämpfte Welle nicht weiter mathematisch behandeln muß, sie spielt im allgemeinen keine Rolle mehr, die reflektierte Welle (im nichtabsorbierenden Medium wieder längsgedämpft) ist das, was beobachtet wird. Hier jedoch ist allein die einfallende Welle längsgedämpft. Sowohl die beiden durchgehenden als auch die beiden reflektierten Wellen sind schräggedämpft.

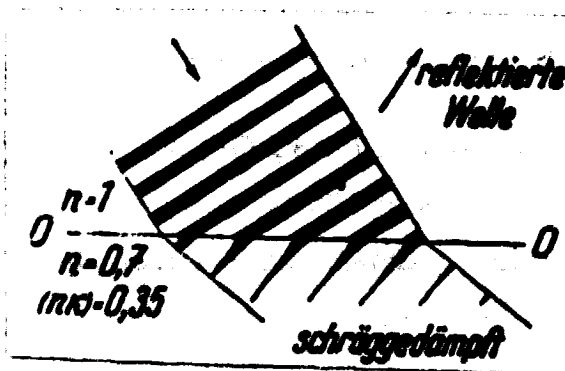


Abb. 15

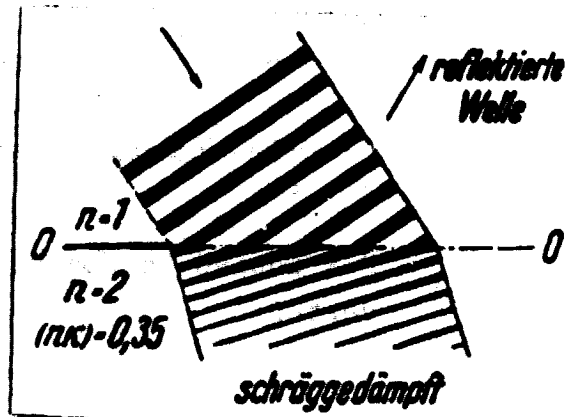


Abb. 16

Der Betrag von \vec{n}_i gibt wieder die räumliche Abklingkonstante (Eindringtiefe) an.

An dieser Stelle sei auch darauf hingewiesen, daß die Ausbreitungsrichtung der durchgehenden und der reflektierten Wellen (angegeben durch den Einheitsvektor in Richtung von \vec{n}_r , (6.48)), nun auch von den Absorptionseigenschaften

der Medien abhängt, denn es geht ja α , β und ν ein! Beschreibt man die Ausbreitungsrichtung der Welle nicht durch den Vektor \vec{n}_r (6.48), sondern etwa durch einen Winkel ϕ , gemessen gegen die z-Achse (das Lot), Einheitsvektor \vec{e}_z , so wird:

$$\sin \phi = \frac{1}{|\vec{n}_r|} \cdot |\vec{e}_z \times \vec{n}_r|$$

$$= \frac{(k\alpha + \alpha\beta)}{[(k\alpha + \alpha\beta)^2 + (k\mu + \alpha\nu)^2]^{1/2}}$$
(6.50)

und

$$\cos \phi = \frac{1}{|\vec{n}_r|} (\vec{e}_z \cdot \vec{n}_r)$$

$$= \frac{(k\mu + \alpha\nu)}{[(k\alpha + \alpha\beta)^2 + (k\mu + \alpha\nu)^2]^{1/2}}$$
(6.51)

Die Richtung der Wellenausbreitung wird also nicht einmal durch den Realteil von χ angegeben. Der komplexe Winkel χ hat seine Bedeutung darin, rein formal bei der Darstellung einer Welle in der Form von (6.40) auch die schräggedämpfte Welle zu beschreiben. Nur im Falle, daß die Absorption verschwindet, also $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$, $\nu \equiv 0$, wird $\phi = \chi$.

Natürlich kann man die beiden unabhängigen "Kenngrößen", die der Realteil und der Imaginärteil von χ darstellt, durch zwei andere, vielleicht anschaulichere beschreiben, wie z.B. den (reellen) Ausbreitungswinkel ϕ ((6.50) und (6.51)) und den entsprechenden (reellen) Winkel ξ , der die "Richtung der Dämpfung" angibt:

$$\sin \xi = \frac{1}{|\vec{n}_i|} \cdot |\vec{e}_z \times \vec{n}_i|$$

$$= \frac{(k\beta - \alpha\alpha)}{[(k\beta - \alpha\alpha)^2 + (k\nu - \alpha\beta)^2]^{1/2}}$$
(6.52)

$$\sin \xi = \frac{1}{|\vec{n}_i|} \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{n}_i) - \frac{(k\beta - \alpha\alpha)}{[(k\beta - \alpha\alpha)^2 + (k\gamma - \alpha\mu)^2]^{1/2}} \quad (6.53)$$

Generell nennt man Wellen, bei denen die Ebenen konstanter Phase und die Ebenen konstanter Amplitude nicht parallel sind, "inhomogene Wellen".

Wir wollen nun mit Hilfe dieser Überlegungen die Gleichung (6.39) weiter diskutieren. Wegen $\eta_1 = k_1$ gilt ja zunächst:

$$\xi_R = \xi_E \quad (6.54a)$$

also daß der Reflexionswinkel für den gleichen Wellentyp (hier im "Fall 1" zunächst longitudinal) dem Einfallswinkel gleich ist. Für die anderen Winkel hat man:

$$\sin \delta_D = \frac{k_1}{k_2} \sin \delta_E = \frac{k_1 \cdot k_2^*}{k_2 \cdot k_2^*} \sin \delta_E \quad (6.54b)$$

$$\sin \delta_D = \frac{k_1}{x_2} \sin \delta_E = \frac{k_1 \cdot x_2^*}{x_2 \cdot x_2^*} \sin \delta_E \quad (6.54c)$$

$$\sin \delta_R = \frac{k_1}{\gamma_2} \sin \delta_E = \frac{k_1 \cdot \gamma_2^*}{\gamma_2 \cdot \gamma_2^*} \sin \delta_E \quad (6.54d)$$

wobei k_E ja als vorgegeben zu betrachten ist. Allerdings kann bereits der Einfallswinkel k_E komplex sein (d.h. einfallende Welle schräggedämpft), wenn sie bereits durch eine vorangegangene Transmission oder Reflexion inhomogen geworden ist.

Spaltet man die Gleichung (6.39) nach Real- und Imaginärteil auf - was hier beispielhaft nur für die ersten beiden Ausdrücke durchgeführt werden soll - so läßt sie sich als verallgemeinertes Snellius'sches Gesetz interpretieren; mit den Bezeichnungen

(6.32) und (6.45):

$$(k_1 - i\alpha_1)(\alpha_E + i\beta_E) = (k_2 - i\alpha_2)(\alpha_D + i\beta_D)$$

$$k_1 \alpha_1 + \alpha_1 \beta_E = k_2 \alpha_D + \alpha_2 \beta_D \quad (6.55)$$

$$k_1 \beta_E - \alpha_1 \alpha_E = k_2 \beta_D - \alpha_2 \alpha_D \quad (6.56)$$

Vergleichen wir (6.55) mit (6.50) und bedenken, daß der Nenner in (6.50), also $|\vec{n}_r|$ ja gerade die "tatsächliche" Wellenzahl ist, so können wir in der aus (6.55) entstehenden Beziehung

$$|\vec{n}_{r1}| \cdot \sin \phi_1 = |\vec{n}_{r2}| \cdot \sin \phi_2 \quad (6.57)$$

die Randbedingung erkennen, daß die Scheingeschwindigkeit, mit der sich die durch die Welle verursachte Störung längs der Grenzfläche ausbreitet, für beide Seiten der Grenzfläche gleich sein muß.

Entsprechend vergleichen wir (6.56) mit (6.52). Da $|\vec{n}_i|$ ja die "tatsächliche" Abklingkonstante ist, beschreibt die aus (6.56) entstehende Beziehung, daß $|\vec{n}_i| \cdot \sin \tau$ auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sein soll, daß die Anregungsamplitude für die reflektierten und die transmittierten Wellen auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sein muß, sie nimmt infolge der Dämpfung längs der Grenzfläche ab.

Schließlich ist in diesem Zusammenhang mit (6.39) noch von Bedeutung, daß das Verhältnis der sinus der "tatsächlichen" Ausbreitungswinkel, also die Größe $\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2}$, die man "naiv" als "den Brechungsindex" erklären würde, nicht mehr konstant ist, sondern vom Einfallswinkel abhängt; gemäß (6.57) gilt nämlich:

$$\frac{\sin \Phi_1}{\sin \Phi_2} = \frac{|\vec{n}_{r2}|}{|\vec{n}_{r1}|} = \left\{ \frac{(k\alpha + a\beta)_2^2 + (k\mu + a\nu)_2^2}{(k\alpha + a\beta)_1^2 + (k\mu + a\nu)_1^2} \right\}^{1/2} \quad (6.58)$$

Hier treten α_1 und β_1 (sowie ν_1 und μ_1) auf, die ja den Einfallswinkel Φ_1 festlegen. Besonders anschaulich wird dies, wenn wir eine längsgedämpfte, also homogene Welle einfallen lassen, so daß Φ_1 reell wird, $\beta_1 = 0$, $\nu_1 = 0$. Dann wird (bei Berücksichtigung von (6.55)):

$$\frac{\sin \Phi_1}{\sin \Phi_2} = \left\{ \sin^2 \Phi_1 + \frac{(k\mu + a\nu)_2^2}{k_1^2 \alpha_1^2 + k_1^2 \mu_1^2} \right\}^{1/2}$$

Wenn man noch an die Definition von α und μ denkt ((6.45) und (6.46)), wird dann:

$$\frac{\sin \Phi_1}{\sin \Phi_2} = \left\{ \sin^2 \Phi_1 + \frac{(k_2 \mu_2 + a_2 \nu_2)^2}{k_1^2} \right\}^{1/2} \quad (6.59)$$

Wir können nunmehr auf die Lösung des durch (6.35) formulierten Problems zurückkommen. Dazu berücksichtigen wir (6.37) und auch (6.32); letztere Beziehung führt wegen (6.37) auch auf

$$\sigma_{12} = k_{12} \quad \text{und} \quad \delta_{12} = \chi_{12} \quad (6.60)$$

Man erhält, zunächst aus (6.36), dann aus den weiteren Randbedingungen (6.23), (6.25), (6.26):

$$A_E k_{1x} + A_R k_{1x} + B_R \gamma_{12} - A_D k_{1x} - B_D x_{22} = 0 \quad (6.61a)$$

$$-A_E k_{12} - A_R k_{12} + B_R k_{1x} + A_D k_{22} - B_D k_{1x} = 0 \quad (6.61b)$$

$$\begin{aligned} & -A_E 2\mu_1 k_{1x} k_{12} - A_R 2\mu_1 k_{1x} k_{12} + B_R \mu_1 (k_{1x}^2 - \gamma_{12}^2) \\ & + A_D 2\mu_2 k_{1x} k_{22} - B_D \mu_2 (k_{1x}^2 - x_{22}^2) = 0 \end{aligned} \quad (6.61c)$$

$$\begin{aligned} & -A_E (\lambda_1 + 2\mu_1) k_{12}^2 - A_R (\lambda_1 + 2\mu_1) k_{12}^2 + B_R (\lambda_1 + 2\mu_1) k_{1x} \gamma_{12} \\ & + A_D (\lambda_2 + 2\mu_2) k_{22}^2 - B_D (\lambda_2 + 2\mu_2) k_{1x} x_{22} = 0 \end{aligned} \quad (6.61d)$$

Diese vier Gleichungen (6.61 a-d) stellen ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Amplituden A_R , B_R , A_D , B_D dar, wenn man A_E als vorgegeben betrachtet. Daraus erhalten wir dann

$$\frac{A_R}{A_E} = R_{LL} ; \quad \frac{B_R}{A_E} = R_{LT} ; \quad \frac{A_D}{A_E} = D_{LT} ; \quad \frac{B_D}{A_E} = D_{LT} \quad (6.62)$$

Dies sind die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die elastischen Potentiale. Will man die entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Verrückungen \vec{u} haben, so müssen wir von den elastischen Potentialen, wie sie in (6.28) bis (6.31) angesetzt sind, mit (6.10) und (6.11) auf die Amplituden von \vec{u} umrechnen. Man ersieht aus (6.19), daß die Amplituden der Longitudinalwellen, ausgedrückt durch die Potentiale φ , also die A , mit dem jeweiligen

$$|\vec{k}| = k - ia \quad (\text{gemäß Bemerkung S. 122})$$

zu multiplizieren ist, um die entsprechende Wellenamplitude der Longitudinalwelle, ausgedrückt durch die Verschiebung von \vec{u} zu erhalten. Aus (6.20) ersieht man, daß man die Amplituden B

ebenfalls mit $|\vec{u}|$ multiplizieren muß, um auf die SV-Wellen-Amplituden in \vec{u} zu kommen (Betrag des Vektors u_1 ist $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, weil \vec{u} senkrecht auf dem " \vec{v} -Vektor" steht: (6.20)). Dieser Übergang von den Potentialamplituden auf die Verschiebungswellenamplituden ist analog dem entsprechenden Übergang bei nicht-absorbierenden Medien [Muskat, M. und M.W. Meres, 1940].

Mit dem Gleichungssystem (6.61) und den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (6.62) haben wir ein Gleichungssystem für diese R- und D-Koeffizienten, welches etwa nach der Determinanten-Methode zu lösen wäre. Ist jedoch bereits der einfachere Fall der Grenzfläche zwischen zwei ideal-elastischen Medien bereits nicht mehr analytisch überschaubar (vgl. die zu Anfang dieses Kapitels erwähnte Literatur), sondern muß numerisch für entsprechende Wahl der Parameter behandelt werden, so ist jetzt das Problem doch erheblich komplizierter: Das Gleichungssystem (6.61) ist ein komplexes Gleichungssystem, weil die Wellenzahlen und die in (6.61c) und (6.61d) außerdem noch explizit auftretenden elastischen Moduln komplexwertig sind. Damit werden auch die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (6.62) komplex: Anhand der Ansätze (6.28) bis (6.31) macht man sich sofort klar, daß komplexwertige Amplituden A und B bedeuten, daß die Phase der Welle an der Grenzfläche springt. Dieser Phasensprung ist von der Frequenz der Welle abhängig, da die Imaginärteile der Wellenzahlen und der elastischen Moduln frequenzabhängig sind. Das Gleichungssystem (6.61) stellt also in Wirklichkeit 8 Gleichungen für 8 zu berechnende Größen dar.

Fall 2 *):

Wir wollen jetzt das zu (6.61) entsprechende Gleichungssystem aufstellen, wenn eine Transversalwelle vom SV-Typ einfällt:

$$A_E = 0 \quad (6.63)$$

*) "Fall 1" s. S. 130

Wir verwenden wieder die Grenzbedingungen (6.22) bis (6.26) mit den Ansätzen (6.28) bis (6.31) und berücksichtigen (6.32). Bei der Anwendung der Randbedingungen für die Grenzfläche kommt es dann wieder zu einem verallgemeinerten Snellius'schen Gesetz aus der gleichen Überlegung wie bei (6.37), und zwar:

$$x_{1x} = x_{2x} = \gamma_{1x} = \gamma_{2x} = x_{1x} \quad (6.64)$$

Dann erhält man schließlich folgendes Gleichungssystem:

$$A_R k_{1x} + B_E \gamma_{12} + B_R \gamma_{12} - A_D k_{1x} - B_D x_{22} = C \quad (6.65a)$$

$$-A_R k_{12} + B_E k_{1x} + B_R k_{1x} + A_D k_{22} - B_D k_{1x} = 0 \quad (6.65b)$$

$$\begin{aligned} & -A_R \cdot 2\mu_1 k_{1x} k_{12} + B_E \mu_1 (k_{1x}^2 - \gamma_{12}^2) + B_R \mu_1 (k_{1x}^2 - \gamma_{12}^2) \\ & + A_D \cdot 2\mu_2 k_{1x} k_{22} - B_D \mu_2 (k_{1x}^2 - x_{22}^2) = 0 \end{aligned} \quad (6.65c)$$

$$\begin{aligned} & -A_R (\lambda_1 + 2\mu_1) k_{12}^2 + B_E (\lambda_1 + 2\mu_1) k_{1x} \gamma_{12} + B_R (\lambda_1 + 2\mu_1) k_{1x} \gamma_{12} \\ & + A_D (\lambda_2 + 2\mu_2) k_{22}^2 - B_D (\lambda_2 + 2\mu_2) k_{1x} x_{22} = 0 \end{aligned} \quad (6.65d)$$

Bezieht man alle Amplituden A und B auf die Amplitude der einfallenden Welle B_E , so lassen sich die 4 (komplexen) Gleichungen (6.65) umschreiben in solche für die entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der Potentiale, die - wie in (6.62) - definiert sind:

$$\frac{A_R}{B_E} = R_{TL}; \quad \frac{B_R}{B_E} = R_{TT}; \quad \frac{A_D}{B_E} = D_{TL}; \quad \frac{B_D}{B_E} = D_{TT} \quad (6.66)$$

Umschreibung auf Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Verrückungsamplituden geschieht dann entsprechend wie bei "Fall 1".

Das Gleichungssystem (6.65) ist den Gleichungen (6.61) sehr ähnlich und stellt mithin die gleichen Probleme.

Fall 3:

Es soll jetzt noch der einfachere Fall behandelt werden, daß eine SH-Welle auf die Grenzfläche trifft.

Es tritt keine Konversion in andere Wellentypen auf, eine SH-Welle bleibt SH-Welle bei Reflexion und Transmission. Entsprechend zu den Ansätzen (6.28) bis (6.31) machen wir folgende Ansätze:

$$u_{y1} = C_E e^{-i(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + C_R e^{-i(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.67)$$

$$u_{y2} = C_D e^{-i(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.68)$$

wobei nun - entsprechend zu (6.32) - gelten muß, daß

$$|\vec{\omega}_1| = \omega_1 = |\vec{\omega}_1| = \omega_1 = \delta_1 = \chi_1 \quad (6.69)$$

$$|\vec{\omega}_2| = \omega_2 = \chi_2$$

Mit diesen Ansätzen (6.67) und (6.68) geht man in die beiden Grenzbedingungen (6.24) und (6.27) ein, und man erhält zunächst wieder ein verallgemeinertes Snellius'sches Gesetz, welches jetzt lautet:

$$\omega_{1x} = \omega_{1x} = \omega_{2x} \quad (6.70)$$

wobei wegen (6.69) $\vartheta_{1x} = \vartheta_{1x}$ bedeutet, daß der "Ausfallswinkel" bei Reflexion der SH-Welle gleich dem Einfallswinkel sein muß. Es entstehen nun also folgende Gleichungen:

$$C_E + C_R - C_D = 0 \quad (6.71a)$$

$$\mu_1 \cdot \vartheta_{12} \cdot C_E + \mu_1 \cdot \vartheta_{12} \cdot C_R - \mu_2 \cdot \vartheta_{22} \cdot C_D = 0 \quad (6.71b)$$

Auch dies sind immerhin 2 komplexe Gleichungen (also 4 Gleichungen) für die Reflexion und Transmission der SH-Welle.

Wie bereits erwähnt, ist es unmöglich, eine allgemeine analytische Lösung der Gleichungssysteme (6.61), (6.65) und (6.71) anzustreben, die insbesondere hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (im Realteil: d.h. hinsichtlich der Amplituden, und im Imaginärteil: d.h. hinsichtlich des Phasensprungs) eine Übersicht erlaubt. Man kann natürlich immer eine numerische Lösung anstreben, bei vorgegebenem Dichte-, Geschwindigkeits- und Absorptions- ("Q-") Kontrast, wobei nun allerdings zur Abhängigkeit vom Einfallswinkel der Welle noch die Frequenzabhängigkeit in Real- und Imaginärteil hinzukommt.

Eine andere Möglichkeit, das gestellte Problem anzugehen, besteht darin, den - in der Praxis wohl im allgemeinen wahrscheinlichen - Fall der "schwachen Absorption" anzunehmen, d.h. daß der Imaginärteil der Wellenzahlen klein ist im Vergleich zum Realteil. Man kann versuchen, die Gleichungssysteme dann näherungsweise zu lösen, etwa mit den folgenden Ansätzen für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus (6.62) und (6.66):

$$R = R^{(0)} + r \quad D = D^{(0)} + d \quad (6.72)$$

Dabei wären dann $R^{(0)}$ und $D^{(0)}$ die Koeffizienten, die ohne Absorption gelten, und man würde sich auf die erste Ordnung in den komplexen r und d beschränken. Die $R^{(0)}$ und $D^{(0)}$ sind jene Koeffizienten, die in der zu Anfang dieses Kapitels erwähnten Literatur, z.B. bei W.M. Ewing, W.S. Jardetzky und F. Press [1957], S. 63 ff. (mit etwas anderer Bezeichnungsweise) zu finden sind. Da aber auch diese Koeffizienten schließlich nur einer numerischen Analyse zugänglich sind (vgl. die Diskussion zu Anfang dieses Kapitels), wird auch eine solche Näherungsrechnung zunächst keine weitere Übersichtlichkeit hinsichtlich der hier interessierenden frequenzabhängigen Effekte bringen; man mag vielleicht versuchen, die Größen $R^{(0)}$ und $D^{(0)}$ als (frequenzunabhängige) gegebene Lösungen der vereinfachten Gleichungssysteme anzusehen, ohne sie explizit anzugeben und die Lösung nur auf die Korrekturgrößen r und d zu konzentrieren, denn wir interessieren uns ja nicht so sehr für den Absolutbetrag der Reflexion und Transmission, als vielmehr für die frequenzabhängigen Terme, die von Absorption und Dispersion herrühren. Diesem Gedanken entspricht ein Versuch, anstatt der Gleichungen für die Koeffizienten D und R solche aufzustellen für $\frac{\partial D}{\partial \omega}$ und $\frac{\partial R}{\partial \omega}$, um nur die frequenzabhängigen Anteile zu behalten.

Besonders einfach werden die Verhältnisse allerdings, wenn man den Fall senkrechter Inzidenz betrachtet: Es entkoppeln sich dann Longitudinal- und Transversalwellen, und außerdem sind die Wellen dann nicht mehr inhomogen, d.h. Dämpfungsrichtung und Ausbreitungsrichtung fallen zusammen. In diesem Fall braucht man lediglich den Ausdruck für Reflexion und Transmission bei senkrechter Inzidenz für ideal-elastische Medien zu verwenden, und die darin auftretenden Geschwindigkeiten durch die entsprechenden komplexen Geschwindigkeiten (nach (2.1.47)) zu ersetzen. Dieser Fall ist für die praktische Anwendung durchaus von Bedeutung, wenn man bedenkt, daß in der Reflexionsseismik die Reflexionen für größere Tiefen nahezu senkrecht an den Grenzflächen erfolgen. Dieser Spezialfall der senkrechten Inzidenz wurde von

A.G. Averbuch und N.A. Trapeznikova [1972] und später von C. Crowe und K. Alhilali [1974] diskutiert. Nach Auftrennung in Real- und Imaginärteil der komplexen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten erhält man:

(a) für den Reflexionskoeffizienten R der Wellenamplituden:

$$R = \left[\frac{\omega^2 (\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)^2 + c_1^2 c_2^2 (\rho_2 a_1 - \rho_1 a_2)^2}{\omega^2 (\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2 + c_1^2 c_2^2 (\rho_2 a_1 + \rho_1 a_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.73)$$

(b) für den Phasensprung ϕ_R der reflektierten gegen die einfallende Welle:

$$\phi_R = \arctg \frac{2 \rho_1 c_1 c_2 \rho_2 \omega (a_2 c_2 - a_1 c_1)}{\rho_2^2 c_2^2 (a_1^2 c_1^2 + \omega^2) - \rho_1^2 c_1^2 (a_2^2 c_2^2 + \omega^2)} \quad (6.74)$$

(c) für den Transmissionskoeffizienten D der Wellenamplituden:

$$D = 2 \rho_1 c_1 \left[\frac{\omega^2 + c_2^2 a_2^2}{\omega^2 (c_2 \rho_2 + c_1 \rho_1)^2 + c_1^2 c_2^2 (\rho_2 a_1 + \rho_1 a_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.75)$$

(d) für den Phasensprung ϕ_D der transmittierten gegen die einfallende Welle:

$$\phi_D = \arctg \frac{\rho_2 c_2 \omega (c_1 a_1 - c_2 a_2)}{\rho_2 c_2 (\omega^2 + c_1 a_1 c_2 a_2) + \rho_1 c_1 (\omega^2 + c_2^2 a_2^2)} \quad (6.76)$$

Dabei sind ρ_1, ρ_2 die Dichten in den Medien 1 und 2, c_1 und c_2 die Phasengeschwindigkeiten der Wellen im Sinne von (4.2.30), wobei $K(\omega) = \frac{\omega}{c}$ ist, a_1 und a_2 die Absorptionskoeffizienten, wie sie durch (2.1.50) definiert sind und mit den Q-faktoren durch (2.1.61) verknüpft sind.

Wenn wir von dem Beobachtungsbefund ausgehen, daß $a \sim \omega$ bzw. (gemäß (2.1.61)) $Q = \text{const}$ ist, so fällt sowohl in R und D

als auch in den Phasen die markante Frequenzabhängigkeit heraus und es bleibt nur noch jene, die gemäß (4.2.30) als Dispersion in den Phasengeschwindigkeiten enthalten ist; Über den relativ kleinen Frequenzbereich der Explorationsseismik (etwa 10 Hz ... 100 Hz) ist diese Frequenzabhängigkeit also bedeutungslos.

Interessant ist hingegen noch ein anderer Gesichtspunkt: Nehmen wir einmal die gleiche akustische Impedanz $\rho \cdot c$ in beiden Medien an

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$$

(6.77)

so wäre ohne Absorption der Reflexionskoeffizient $R = 0$ und der Transmissionskoeffizient $D = 1$. Bei Berücksichtigung der Absorption erhalten wir jetzt trotzdem eine Reflexion $R \neq 0$, die wesentlich vom Absorptionskontrast abhängt. Wir erhalten also seismische Reflexionen, wenn sich allein der Absorptionskoeffizient ändert; auch hierin könnte man eine Ursache für das Auftreten von "bright spot" *) im amplitudengetreuen Seismogramm sehen und damit eine Ursache für die dabei aufgetretenen Fehlinterpretationen.

Im Zusammenhang mit der Frage der Reflexion und Transmission seismischer Wellen an Grenzflächen und der Frage der Absorption soll aber noch auf einen gänzlich anderen Gesichtspunkt hingewiesen werden, der in der Praxis offenbar - wie die Erfahrung zeigt (vgl. Kap. 7) - eine bedeutendere Rolle spielt als die Frequenzabhängigkeit von Reflexions- und Transmissionskoeffizienten: Wir stellen uns ideal-elastische (also nicht-absorbierende) Medien vor, dann wird der Reflexionskoeffizient vom Kontrast der akustischen Impedanz $\rho \cdot c$ bestimmt. Hat man nun ein "Schichtpaket", welches statt einer einheitlichen Struktur aus einer Feinschichtung besteht, mit Wechsellagerungen dünner

*) Zur Übersicht über die "bright-spot"-Methode, z.B. Hammond, A.L. [1974] oder Lindsey, J.P. [1974].

Schichten von unterschiedlichem $\rho \cdot c$, so kann es zum Entstehen von vielfachen internen multiplen Reflexionen (und Transmissionen) kommen, die sich gegenseitig überlagern und - wenn die Schichtung nur "fein" genug ist im Vergleich zur Wellenlänge - zu Interferenzeffekten Anlaß geben, derart, daß bestimmte Frequenzen im Spektrum verstärkt, andere ausgelöscht bzw. geschwächt werden. Insofern kann das Signalspektrum $s(\omega)$ im Sinne von (4.3.14) ganz markant verfälscht werden. So können scheinbar Absorptionseffekte vorgetäuscht werden, die dann beliebige Frequenzabhängigkeit und nicht mehr unbedingt " Q " = const zeigen [Spencer, T.W., C.M. Edwards und J.R. Sonnad, 1977]; es kann genauso auch zu scheinbar negativer Absorption kommen (vgl. Kap. 7.2). Schließlich zeigen ja in der Tat die sonic-logs sehr häufig eher feinstrukturierte als homogene Schichtpakete, worauf Spencer, T.W. et al. [1977] mit Recht aufmerksam machen. Solche Effekte auf das Spektrum eines seismischen Impulses kann man auch als - nunmehr sehr stark frequenzabhängige - Reflexion und Transmission ansehen und dies hat dann u.U. erheblich mehr Bedeutung als die Reflexion und Transmission an idealen Grenzflächen selbst bei Vorhandensein von Absorption [O'Doherty, R.F. und N.A. Anstey, 1971]. Schoenberger, M. und F.K. Levin [1974] und [1978] haben solche Effekte scheinbarer Absorption mit synthetischen Seismogrammen aufgezeigt, die sie für zahlreiche gemessene sonic-logs berechnet haben. Schließlich sei die Arbeit von Silva, W. [1976] erwähnt, der eine Problemformulierung mit Beispielen aufzeigt zur Frage eines vielfach geschichteten Mediums, dessen Einzelschichten nicht ideal-elastisch sind, sondern Absorption zeigen.

7. Zur Bestimmung der Dämpfung seismischer Wellen aus Reflexionsseismogrammen

Nachdem wir nun im vorangegangenen Kapitel die Reflexions- und Transmissions-Eigenschaften von absorbierenden Medien untersucht haben, steht uns nun nach (4.3.14) der Weg offen, über die Absorption (bzw. die Übertragungsfunktion) in der Erdkruste aus Seismogrammen Aufschluß zu erhalten, wenn es gelingt, Methoden zu entwickeln, die mindestens das unbekannte Ausgangsspektrum des Impulses, $A(\omega)$ und möglichst auch das (meist nicht sonderlich gut bekannte) $g(\omega)$ zu eliminieren erlauben.

7.1. Grundzüge der Methode

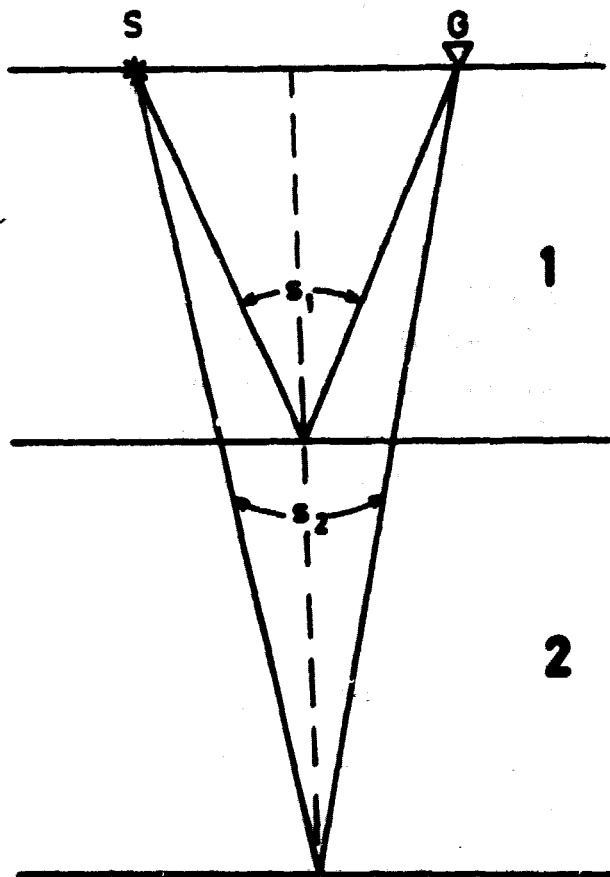


Abb. 17

Wir gehen aus von der Darstellung des seismischen Impulses durch (4.3.14) mit (4.3.10). Uns ist zunächst einmal daran gelegen, das unbekannte Spektrum des Ausgangsimpulses $A(\omega)$ zu eliminieren. Deshalb muß die Methode der Absorptionsbestimmung darin bestehen, verschiedene seismische Einsätze, die zum gleichen Schuß gehören, also das gleiche $A(\omega)$ haben, miteinander zu "vergleichen" und daraus auf den Unterschied der Übertragungsfunktionen, mithin auf den Unterschied der Absorption der verschieden gelaufenen Einsätze zu schließen.

Nun hat man in der Praxis der Reflexionsseismik zu einem Schuß meist 24 oder 48 Einzelspuren, die durch Geophone in verschiedenem Abstand zum Schußpunkt aufgezeichnet werden. Man könnte z.B. den Reflexionseinsatz einer bestimmten Schichtgrenze in zwei verschiedenen Einzelspuren des gleichen Schusses betrachten und daraus auf die "pauschale" Absorption der über dieser Schichtgrenze liegenden Formationen schließen, weil ja die Impulse in beiden Spuren bei verschiedenem Einfallswinkel die Schichten auf verschieden langem Wege durchlaufen haben. Aber abgesehen davon, daß bei den in der Praxis verwendeten Geometrien sich die Laufwege der Reflexionen tieferer Horizonte kaum unterscheiden (was man daran erkennt, daß die NMO-Hyperbel*) kaum mehr als solche zu sehen ist), müßte man voraussetzen, daß die Geophone (bzw. die Geophongruppen) die gleiche Übertragungsfunktion $g(\omega)$ haben und schließlich, daß eine etwaige Frequenzabhängigkeit von Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R(\omega)$ und $T(\omega)$ nicht auch vom Einfallswinkel abhängt.

Deshalb ist es besser, verschiedene Einsätze des gleichen Schusses (also Reflexionen aus verschiedener Tiefe) in der gleichen Einzelspur zu untersuchen; damit ist gewährleistet, daß nicht nur das Ausgangsspektrum $A(\omega)$, sondern auch die Geophonübertragungsfunktion $g(\omega)$ eliminiert werden kann: Abb. 17. Bestimmt werden kann dann der Unterschied der Übertragungsfunktionen längs der Laufwege S_1 und S_2 , mithin die Absorption der zwischen den beiden Einsätzen liegenden Schicht 2. Man sucht sich also aus den 24 (oder 48) Einzelspuren eines Schusses eine schußnahe Spur heraus, bei der die beiden interessierenden Einsätze beide gut ausgeprägt sind; "schußnah" soll die Spur deshalb ausgesucht werden, damit die Näherung, daß der Laufwegunterschied $S_2 - S_1$ ungefähr der doppelten Mächtigkeit der Schicht 2 gleich ist, möglichst gut erfüllt ist (sonst müßte man eine - prinzipiell mögliche - Korrekturformel anwenden, die die Geometrie berücksichtigt, um von $S_2 - S_1$ auf die Schichtmächtigkeit zu kommen).

*) NMO = normal move-out

Aus dieser schußnahen seismischen Einzelspur, die natürlich in "true amplitude" vorliegen sollte (Amplitudenkorrekturen könnten, wenn sie sich über die Länge des seismischen Einsatzes - etwa 100 ... 200 msec - wesentlich ändern, zu Verfälschungen des Spektrums führen), schneidet man die beiden Einsätze $S_1(t)$ und $S_2(t)$ heraus und berechnet z.B. mit Hilfe des "Fast-Fourier-Transform (FFT)" - Algorithmus' (z.B. nach Robinson, E.A. [1967], S. 63) die Fouriertransformierten $S_1(\omega)$ und $S_2(\omega)$.

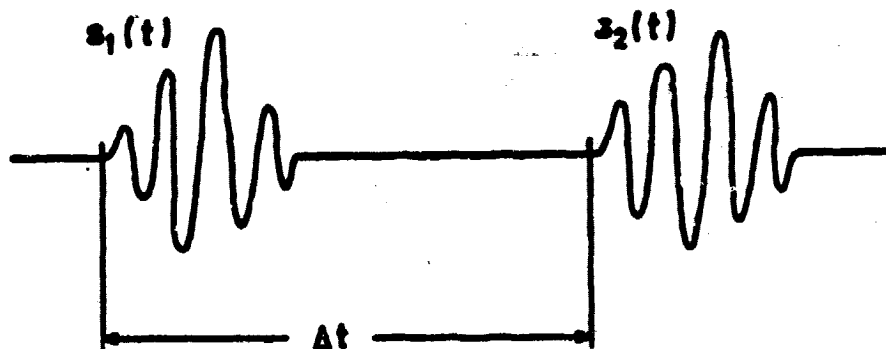


Abb. 18

Bei allen im folgenden vorgestellten numerischen Analysen wurden die seismischen wavelets stets mit einer Länge von 140 msec ausgeschnitten, das sind bei einer samplingrate von 2 msec 70 Datensamples, bei 4 msec samplingrate sind es 35 samples. Diese Daten wurden dann im Zeitbereich mit der "Hamming"-funktion

$$h(t_i) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi}{t_{\max}} \cdot t_i\right) \quad (7.1.1)$$

gewichtet, wobei t_{\max} die Datenlänge des Zeitabschnittes (also 140 msec) ist; dadurch sollten "side-lobe"-Effekte infolge des Ausschneidens aus der seismischen Aufzeichnung verringert werden, es zeigte sich jedoch, daß die Spektren tatsächlicher wavelets sich nicht merklich veränderten, ob nun eine Hammingfunktion angewendet wurde oder nicht. Zur Fouriertransformation selbst wurde an die Datensamples eine Reihe von Nullen angehängt bis auf 256 msec Gesamtlänge; das sind dann bei 2 msec samplingrate 128 samples, die fouriertransformiert werden und bei 4 msec samplingrate sind es 64 samples. Aus der Gesamtlänge des zu transformierenden Datensatzes von

$T = 256$ msec ergibt sich die "Grundfrequenz" f_0 (bzw. ω_0), die Einheit der Frequenzskala der Spektren, zu

$$f_0 = \frac{1}{T} = 3,90625 \text{ Hz} \quad (7.1.2)$$

Das Ausschneiden der seismischen wavelets aus der seismischen Spur wurde nach subjektivem Gutdünken unter Beachtung der Nachbarspuren (Verfolgen des Einsatzes auf der NMO-Hyperbel) vorgenommen^{*)}.

Nachdem die Fouriertransformation erfolgt ist, hat man gemäß (4.3.14) also für die beiden komplexen Spektren stehen:

$$S_1(\omega) = R_1(\omega) D_1(\omega) g(\omega) A(\omega) \tilde{U}_1(\omega, L_1) \quad (7.1.3)$$

$$S_2(\omega) = R_2(\omega) D_2(\omega) g(\omega) A(\omega) \tilde{U}_2(\omega, L_2) \quad (7.1.4)$$

Für die Effekte aus Reflexion und Transmission, beschrieben durch $R_1(\omega)$, $D_1(\omega)$, $R_2(\omega)$ und $D_2(\omega)$ machen wir folgende näherungsweise Annahme: Da wir in der Reflexionsseismik, insbesondere bei schußnahen Spuren, mit nahezu senkrechter Inzidenz des Strahls gegen die vorzugsweise horizontal liegenden Schichtgrenzen rechnen können, wenden wir die Formeln (6.73) bis (6.76) an; wie in Kap. 6 an dieser Stelle gezeigt, fällt die Frequenzabhängigkeit von R und D , sowie bei den Phasen ϕ_R und ϕ_D nahezu weg, wenn man ein $Q = \text{const}$ - Verhalten für die Medien annimmt, insbesondere sofern - wie in der Reflexionsseismik - die Frequenzbandbreite nicht sehr groß ist. Für diesen Fall fassen wir also die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten zu frequenzunabhängigen (und wenn ein konstanter Phasensprung beschrieben werden

^{*)} Es werden derzeit bei der Erdölindustrie Algorithmen entwickelt zum selbständigen Heraussuchen der wavelets eines bestimmten Einsatzes in jeder Einzelspur des Seismogramms; Grundlage dazu ist die Arbeit von Taner, M.T. und F. Koehler [1969].

soll, ggf. komplexen) Konstanten zusammen:

$$a_1 = R_1(\omega) \cdot D_1(\omega) \quad (7.1.5)$$

$$a_2 = R_2(\omega) \cdot D_2(\omega) \quad (7.1.6)$$

a_1 und a_2 enthalten also die Amplitudenfaktoren; in diesen Konstanten denken wir nun uns auch noch die frequenzunabhängigen Amplitudeneffekte der sphärischen Divergenz enthalten: Wir haben (4.3.14) und (4.3.10) für den Fall ebener Wellen hergeleitet, in der Praxis entstehen vom Schußpunkt auslaufend jedoch Kugelwellen; dies bringt gegenüber der Annahme ebener Wellen lediglich den Unterschied, daß die Amplituden im homogenen Medium nicht konstant längs des Ausbreitungswegs sind, sondern wie $(r)^{-1}$ abnehmen (die Energiedichte der Welle nimmt wie $(r)^{-2}$ ab).

Damit sind nun alle frequenzabhängigen Ausdrücke in (7.1.3) und (7.1.4) eliminierbar bis auf $\ddot{U}(\omega, L)$, welches die gesuchte Absorption, den Q-Faktor, enthält (4.3.10). Zu deren Bestimmung aus den Signalspektren sind nun zwei Möglichkeiten gegeben, nämlich indem man einmal den frequenzabhängigen Amplitudenfaktor in $\ddot{U}(\omega, L)$ betrachtet (beschrieben im folgenden unter (a)) oder indem man im anderen Falle (beschrieben im folgenden unter (b)) den phasenbeeinflussenden, dispersiven Anteil von (4.3.10) betrachtet. Beide Methoden sind einander physikalisch äquivalent, da Amplituden und Phasen durch die Dispersionsrelationen miteinander verbunden sind.

Aus beiden Bestimmungsmethoden muß sich, wenn die Dispersionsrelationen gelten, die ja zur Übertragungsfunktion (4.3.5) bzw. (4.3.10) führen, der gleiche Q-Wert ergeben: Hier wäre eine Möglichkeit einer in-situ Prüfung nach der Frage des linearen oder nichtlinearen Absorptionsmechanismus' gegeben.

(a) Spektrendivisionsmethode:

Wenn man von den Spektren in (7.1.3) und (7.1.4) die "Absolutquadrate" bildet, so bleibt von der Übertragungsfunktion lediglich der Amplitudenfaktor bestehen. Zur Elimination von $|g(\omega)|^2$ und $|A(\omega)|^2$ bilden wir gleich den Quotienten der Absolutquadrat-Spektren:

$$\frac{S_2(\omega) \cdot S_2(\omega)^*}{S_1(\omega) \cdot S_1(\omega)^*} = \frac{|S_2(\omega)|^2}{|S_1(\omega)|^2} = \quad (7.1.7)$$

$$= \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} \cdot \exp \left[-|\omega| \cdot \left(\int_0^{L_2} \frac{ds}{Q(s)C_0(s)} - \int_0^{L_1} \frac{ds}{Q(s)C_0(s)} \right) \right]$$

Dabei sind L_1 und L_2 die Laufwege der seismischen Impulse für den Einsatz 1 bzw. Einsatz 2 in der seismischen Spur. Wenn wir eine schußnahe Spur ausgesucht haben, kann jetzt die oben beschriebene Näherung eingebracht werden, daß man nämlich das Integral von 0 ... L_2 zerlegt:

$$\int_0^{L_2} \frac{ds}{Q(s)C_0(s)} \approx \int_0^{L_1} \frac{ds}{Q(s)C_0(s)} + \int_{L_1}^{L_2} \frac{ds}{Q(s)C_0(s)} \quad (7.1.8)$$

Das Integral von L_1 ... L_2 soll sich - und darin liegt die Näherung - allein auf Schicht 2 beschränken. Dies ist in der Praxis bei üblichen Auslagen meist sehr gut erfüllt. Betrachten wir nun noch die Schicht 2 (vgl. Abb. 17) als homogen, so wird

$$\int_{L_1}^{L_2} \frac{ds}{Q(s)C_0(s)} = \frac{1}{Q_2} \cdot \Delta t \quad (7.1.9)$$

wobei

$$\Delta t = \int_{L_1}^{L_2} \frac{ds}{c_0(s)} \quad (7.1.10)$$

die Laufzeit des seismischen Impulses ist, die dieser in Schicht 2 verbringt; sie ist aus der seismischen Aufzeichnung (Abb. 18) direkt als die Laufzeitdifferenz der Einsätze $S_1(t)$ und $S_2(t)$ zu erhalten, ist also dem Auswerter bekannt.

Wir gehen nun mit (7.1.8) und (7.1.9) in den Ausdruck (7.1.7) ein, wobei wir uns nur auf positive Frequenzen beschränken und damit statt $|\omega|$ einfach ω schreiben brauchen^{*)} und wir bilden von (7.1.7) dann den natürlichen Logarithmus, um die Exponentialfunktion umzukehren, dann erhalten wir:

$$\chi(\omega) = \ln \frac{|S_2(\omega)|^2}{|S_1(\omega)|^2} = \text{const} - \frac{\Delta t}{Q_2} \cdot \omega \quad (7.1.11)$$

Wobei mit const abgekürzt wurde der folgende frequenzunabhängige Ausdruck:

$$\text{const} = \ln \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} \quad (7.1.12)$$

In dieser Konstanten könnten ggf. sogar auch Unterschiede im Verstärkungsfaktor während der Aufzeichnung enthalten sein, die $S_1(t)$ und $S_2(t)$ betreffen, solange der Verstärkungsgrad sich nicht über die jeweils ausgeschnittenen Einsätze wesentlich ändert.

Die Beziehung (7.1.11) zeigt also auf, wie man den Q-Faktor für das Schichtpaket bestimmen kann, welches zwischen den aus der seismischen Spur ausgesuchten Einsätzen liegt: Man führe eine Fouriertransformation der beiden Einsätze aus, bilde das Absolut-

^{*)}Für eine komplexe Zahl $z(\omega)$, für die (wie für Fouriertransformierte einer reellen Funktion) gilt, daß $z(-\omega) = z^*(\omega)$ ist, gilt auch: $|z(-\omega)|^2 = |z(\omega)|^2$.

quadrat und berechne den natürlichen Logarithmus des daraus gebildeten Quotienten; diese Funktion $X(\omega)$ muß, über ω aufgetragen, eine Gerade negativer Steigung ergeben, aus deren Steigung man bei bekanntem Laufzeitunterschied der beiden wavelets den Q-Faktor berechnen kann. Ein Beispiel für diese Methode zeigt die Abb. 19; es wurde an einer seismischen Registrierung in Norddeutschland gewonnen, die Grundfrequenz beträgt - wie in (7.1.2) - 3,906 Hz.

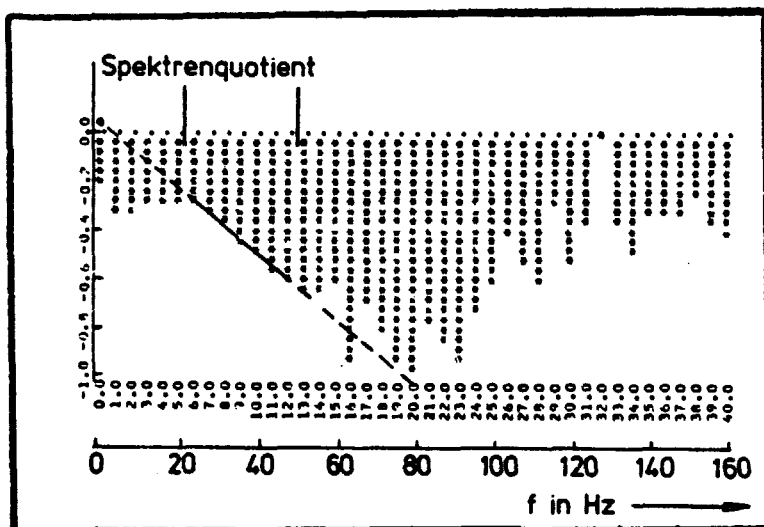


Abb. 19

Es wurde eine Gerade eingepaßt innerhalb eines Frequenzbereiches von $f_1 \dots f_2$, wobei f_1 die untere Grenzfrequenz der verwendeten Geophone bzw. des unteren Filters der Apparatur ist (hier 16 Hz) und f_2 jene obere Grenzfrequenz, bis zu welcher beide wavelets noch Signale wesentlich über dem noise haben; man kann dies z.B. ansehen, wenn man sich die quadratischen Spektren der Einzelsignale - am besten mit logarithmischer Amplitudenauftragung - ansieht. Im Falle hier lag f_2 bei ungefähr 50 Hz. Die nach der Methode der kleinsten Quadrate eingepaßte Gerade ergab ein $Q = 80$ für das zwischen den Einsätzen liegende Schichtpaket.

(b) Phasendifferenzmethode:

Man bildet für die komplexen Spektren $S_1(\omega)$ und $S_2(\omega)$, wie sie durch (7.1.3) und (7.1.4) angegeben sind, mit Berücksichtigung von (7.1.5) und (7.1.6) das jeweilige Phasenspektrum aus dem Quotienten von Imaginär- und Realteil:

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{S_I(\omega)}{S_R(\omega)} \quad (7.1.13)$$

Da nun für das Produkt aus komplexen Zahlen, etwa $z = z_1 \cdot z_2$ gilt, daß die Gesamtphase $\phi = \operatorname{arctg} \frac{z_I}{z_R}$ als Summe der Einzelphasen $\phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{z_{I1}}{z_{R1}}$ und $\phi_2 = \operatorname{arctg} \frac{z_{I2}}{z_{R2}}$, also $\phi = \phi_1 + \phi_2$, darzustellen ist, kann man für die Phasen von $S_1(\omega)$ und $S_2(\omega)$ schreiben:

$$\begin{aligned} \phi_1(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{S_{1I}(\omega)}{S_{1R}(\omega)} \\ &= \varphi(a_1) + \varphi(g(\omega)) + \varphi(A(\omega)) + \varphi(\tilde{U}_1(\omega, L_1)) \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{S_{2I}(\omega)}{S_{2R}(\omega)} \\ &= \varphi(a_2) + \varphi(g(\omega)) + \varphi(A(\omega)) + \varphi(\tilde{U}_2(\omega, L_2)) \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Bildet man nun die Phasendifferenz und verwendet (7.1.9) und (7.1.10), so erhält man:

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \phi_2(\omega) - \phi_1(\omega) \\ &= \chi_0 - \left[\omega \cdot \Delta t - \frac{\Delta t}{\pi Q_2} \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] \\ &= \chi_0 - \left[1 - \frac{1}{\pi Q_2} \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] \cdot \Delta t \cdot \omega \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

wobei der frequenzunabhängige Phasenwinkel

$$\chi_0 = \varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) \quad (7.1.17)$$

benannt wurde; es ist der Unterschied der Phasensprünge bei der Reflexion an der Grenzfläche 1 und Grenzfläche 2. Wie aus (6.74) hervorgeht, werden die Phasensprünge Null, wenn die Absorption verschwindet^{*)}, χ_0 wird also als sehr kleiner Winkel auftreten.

In der Formel von (7.1.16) kommt nun deutlich die Dispersion der Teilwellen, aus denen sich das wavelet zusammensetzt, zum Ausdruck; es verwundert nicht, daß ein Ausdruck der Art von (4.2.30) die entscheidende Rolle spielt.

(7.1.16) ist in dieser Form, wie erwähnt, jedoch nur richtig, wenn die Dispersionsrelationen in der Form (4.2.19) richtig sind; dies setzt linearen Absorptionsprozeß voraus.

Um die Absorption aus der Phaseninformation zu berechnen, muß man also zunächst aus den berechneten komplexen Spektren der beiden Einsätze gemäß (7.1.14) und (7.1.15) die Phasenspektren bilden, deren Differenz dann nach (7.1.16) das $\chi(\omega)$ ergibt. In das berechnete $\chi(\omega)$ ist dann eine Funktion vom Typus (7.1.16) einzupassen. Δt ist aus der seismischen Aufzeichnung bekannt (Abb. 18), χ_0 , ω_0 und das gesuchte Q_2 sind anzupassende Parameter.

In der Praxis ergeben sich zunächst bereits bei der Berechnung der Phasenspektren $\phi_1(\omega)$ und $\phi_2(\omega)$ Schwierigkeiten. Der "arctg" ist nämlich nur modulo π bestimmt, sein Grundintervall reicht von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$. Die einfach nach (7.1.14) und (7.1.15) berechneten Phasenspektren haben deshalb - im Idealfall - einen sägezahnartigen Verlauf, eine etwa monoton wachsende Phase würde

^{*)} Dies gilt nicht mehr im Fall des kritischen Einfallswinkels, z.B. Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. und F. Press [1957], d.h. es gilt nicht mehr im Falle der Refraktionsseismik.

bei $+\pi/2$ einen Sprung nach $-\pi/2$ machen und von da aus erneut ansteigen. Um aus einer solchen unstetigen Phasenfunktion eine "glatte" Funktion zu gewinnen, muß man ein sog. "phase-unwrapping" vornehmen. Dazu findet man in der Literatur (z.E. Robinson, E.A. [1967], S. 65, Subroutine DRUM oder Tribolet, J.M. [1977]) verschiedene Algorithmen. Für die hier vorgenommenen Rechnungen wurde ein Algorithmus entwickelt, bei dem die Differenz zweier aufeinanderfolgender Phasenwerte daraufhin untersucht wird, ob sie größer oder kleiner als $\pi/2$ (die halbe Sprungweite) ist; im ersteren Fall soll dann π addiert werden (d.h. man betrachtet diesen Fall als Übergang in das nächste Definitionsintervall des arctg), während im zweiten Fall die Phasendifferenz der aufeinanderfolgenden Werte als dem natürlichen Verlauf der Phasenfunktion zugehörig betrachtet wird. Dies einfach erscheinende Problem des phase-unwrapping wird durch zwei Faktoren erschwert:

- 1.) Die berechneten Phasen zeigen schon von Natur aus keinen glatten Verlauf, da sie mit noise, in diesem Falle einem "Phasennoise" behaftet sind; durch derart verursachte Streuungen könnten Sprünge der Phasenkurve vorgetäuscht werden.
- 2.) Der Verlauf der Phasenkurve über der Frequenz könnte ungefähr oder gar mehr als π innerhalb eines Frequenz-Grundintervalls (7.1.2) sein. Dann erscheinen die Phasenwerte scheinbar sinnlos auf das Grundintervall verteilt. Hier kann man sich Abhilfe dadurch schaffen, daß man dem zeitausgeschnittenen wavelet "mehr Nullen" anhängt und so das zu transformierende Zeitfenster verlängert, bzw. die Frequenzauflösung im Spektralbereich entsprechend verbessert.

Einen "steilen" Verlauf der Phasenfunktion $\phi_1(\omega)$ und $\phi_2(\omega)$ hat man durchaus zu erwarten, so daß also Sprünge um π tatsächlich so häufig auftreten können, daß die Rekonstruktion des Phasenverlaufs schwierig werden kann: Das Zeitausschnittfenster (140 msec) als Anfangsteil des zu fouriertransformierenden Datensatzes (256 msec) verändert das Phasenspektrum, gleichgültig, ob es nun ein Rechteckfenster oder etwa nach (7.1.1) ein Hammingfenster ist. Denn das Spektrum des Zeitausschnittfensters wäre nur dann reell (d.h. beeinflußt nicht

die Phase), wenn es um $t = 0$ herum symmetrisch liegt:

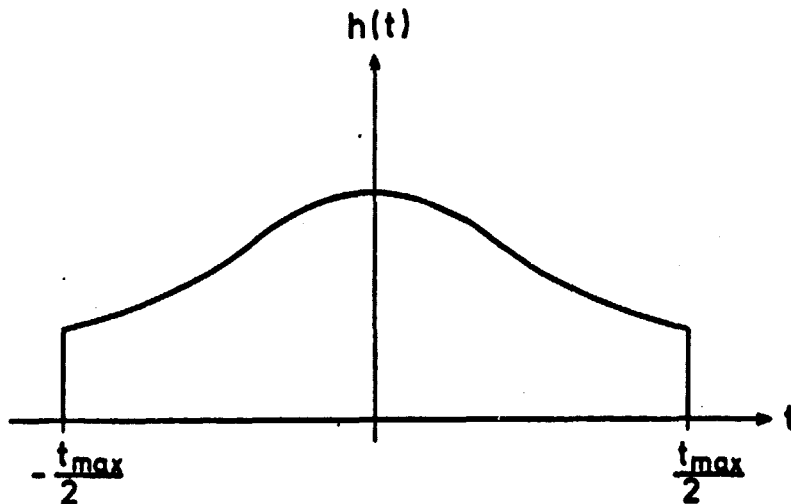


Abb. 20

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7.1.17)$$

ist reell, wenn $h(t)$ eine symmetrische Funktion.
Reelles $H(\omega)$ ändert nicht das Phasenspektrum.

In Wirklichkeit liegt jedoch ein um $\frac{t_{\max}}{2}$ verschobenes Zeitfenster vor (als vorderer Teil des im FFT-Algorithmus' verwendeten Grundintervalls):

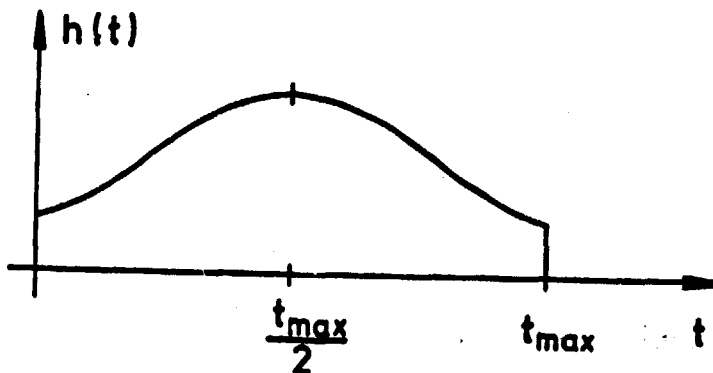


Abb. 21

Die zeitausgeschnittene seismische Zeitreihe läßt sich damit darstellen als

$$s(t) = h\left(t - \frac{1}{2} t_{\max}\right) + s(t) \quad (7.1.18)$$

Nach dem Faltungssatz der Fouriertransformation ist die Fouriertransformierte hiervon:

$$\tilde{s}(\omega) = e^{-i\omega \left(\frac{1}{2}t_{\max}\right)} \cdot H(\omega) \times S(\omega) \quad (7.1.19)$$

Spektrum von $h(t - \frac{1}{2}t_{\max})$

Betrachtet man also das Phasenspektrum $\Psi(\omega)$ des tatsächlich erhaltenen Spektrums $\sigma(\omega)$ und vergleicht mit dem gewünschten Phasenspektrum $\Phi(\omega)$ aus $s(\omega)$, so wird ($H(\omega)$ ist reell):

$$\Psi(\omega) = \frac{\omega}{2} t_{\max} + \Phi(\omega) \quad (7.1.20)$$

Den errechneten Phasenspektrier ist also ein frequenzlinearer Gang $\frac{\omega}{2} t_{\max}$ überlagert; wählt man beispielsweise zu Testzwecken statt des seismischen wavelets einen Datensatz aus Zufallszahlen, so streut deren Phasenspektrum um die Gerade $\frac{\omega}{2} t_{\max}$ herum. Um $\Phi(\omega)$ zu erhalten, muß man vom errechneten $\Psi(\omega)$ die Gerade $\frac{\omega}{2} t_{\max}$ subtrahieren. Bei der Berechnung von $\chi(\omega)$ ist dies jedoch ohne Bedeutung, da der störende Anteil in der Differenzbildung herausfällt. Für das phase-unwrapping kann es jedoch vorteilhaft sein, dies statt an $\Psi(\omega)$ an $\Phi(\omega)$ vorzunehmen.

Die Anwendung der Phasendifferenzmethode erweist sich in der Praxis als schwierig, denn die Q-Bestimmung erfolgt durch Einpassung der lediglich sehr schwach veränderlichen Funktion $\ln \frac{\omega}{\omega_0}$ in die Abweichungen der Meßkurve $\chi(\omega)$ vom linearen Verlauf⁰ (vgl. 7.1.16).

Man könnte vielleicht die differenzierte Funktion

$$\frac{d\chi}{d\omega} = -\Delta t + \frac{\Delta t}{\pi Q_2} \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \frac{\Delta t}{\pi Q_2} \quad (7.1.21)$$

in die numerisch differenzierte Meßkurve einzupassen versuchen, man muß sich aber darüber im klaren sein, daß durch numerisches Differenzieren Streuungen der Meßwerte durch noise besonders hervorgehoben werden. (7.1.17) zeigt eine nur schwache Abhängigkeit von der Frequenz.

Ein Beispiel für eine aus Felddaten gewonnene Phasendifferenzfunktion $\chi(\omega)$ zeigt Abb. 22.

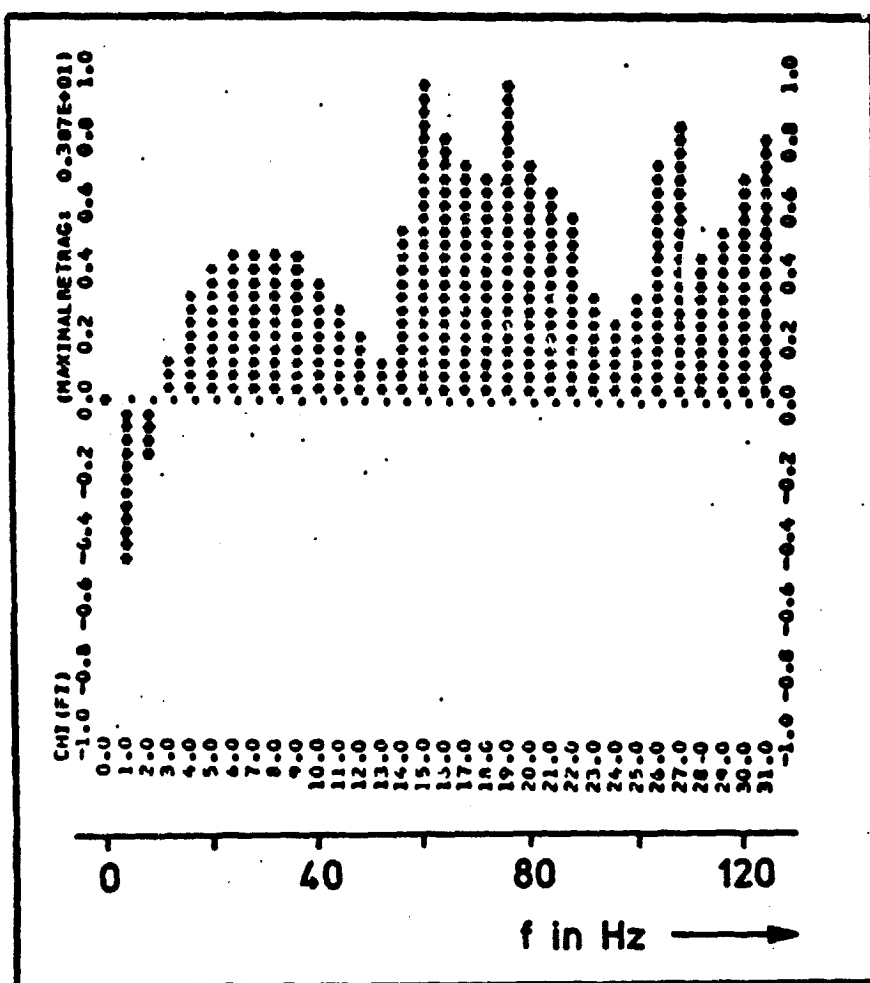


Abb. 22

Bei Versuchen zeigte sich, daß die Phasendifferenzfunktion $\chi(\omega)$ relativ stabil bleibt, d.h. bis auf eine Konstante im Verlauf relativ unverändert, wenn man den Zeitausschnitt des wavelets aus der Einzelspur geringfügig verändert (versucht wurden

Verschiebungen des Zeitfensters um - 30 msec, - 20 msec, - 10 msec, + 10 msec, + 20 msec, + 30 msec).

Es ist anzunehmen, daß die in Kap. 7.2 beschriebenen Störungen durch Interferenzen den ohnehin schwachen (logarithmischen) Funktionsverlauf der Phasendifferenz in bezug auf die Absorption noch nachhaltiger zerstören als dies mit dem Spektrquotienten (7.1.11) geschieht. Daher wurde die Phasendifferenzmethode im späteren Verlauf der Arbeiten nicht mehr verfolgt.

Bei der Refraktionsseismik ist grundsätzlich sowohl die Spektrtrenddivisionsmethode als auch die Phasendifferenzmethode denkbar.

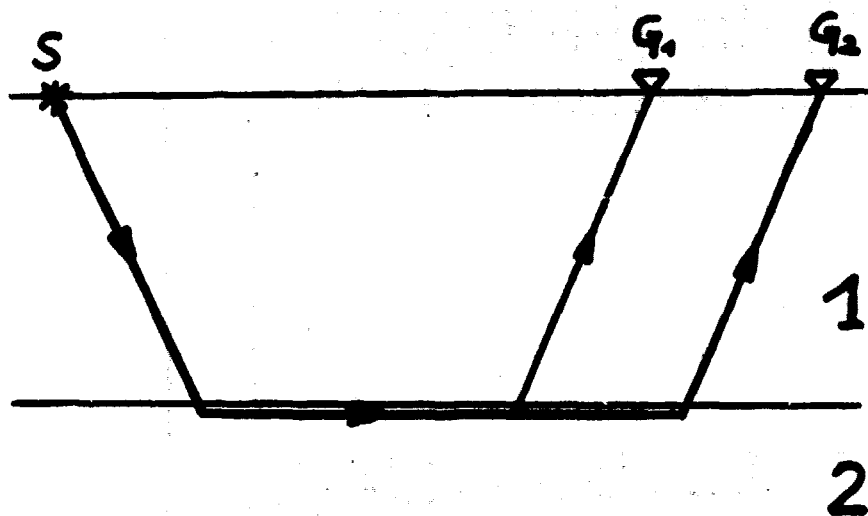


Abb. 23

Man beobachtet an zwei verschiedenen Geophonen G_1 und G_2 Refraktionseinsätze des gleichen Schusses (Abb. 23). Man kann dann nach einer der beiden Methoden auf die Absorption (den Q-Faktor) der führenden Welle in Schicht 2 aufgrund des Laufwegunterschiedes der beiden Einsätze schließen unter Anwendung der gleichen Formeln (7.1.11) bzw. (7.1.16). Dabei muß man jedoch eine Reihe zusätzlicher Annahmen machen, nämlich, daß die Geophonübertragungsfunktionen $g_1(\omega)$ und $g_2(\omega)$ gleich oder doch wenigstens bekannt sind (das schließt die Fragen gleicher

Ankopplung an den Boden mit ein), daß die Übertragungseigenschaften der Schicht 1 für den zum Geophon G_1 und den zum Geophon G_2 laufenden Einsatz gleich sind, so daß diese Teilwege sich eliminieren lassen (dies setzt voraus, daß die Verwitterungsschicht, deren Übertragungseigenschaften ganz bedeutende Filtereffekte enthalten kann - vgl. z.B. Menzel, H. und O. Rosenbach [1957] - an beiden Geophonen gleich ist), und schließlich setzt man voraus, daß die Reflexions- und Transmissionseffekte $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, $D_1(\omega)$ und $D_2(\omega)$ bei der nun nicht mehr senkrechten Inzidenz, sondern im kritischen Winkel, doch zum mindesten für beide Strahlenwege gleich sind.

7.2. Störeinflüsse durch Interferenzen

Wenn man darangeht, etwa nach der Spektrendivisionsmethode (7.1.11) eine Absorptionsbestimmung an einer größeren Zahl verschiedener seismischer Aufzeichnungen vorzunehmen, so stellt man fest, daß man in der wenigsten Zahl der Fälle eine Gerade mit negativer Steigung einpassen kann. Oftmals ergibt sich eher ein Verlauf, der "negative Absorption" anzeigen würde, wie z.B. in Abt. 24, häufig zeigt sich ein völlig irregulärer Verlauf, wie

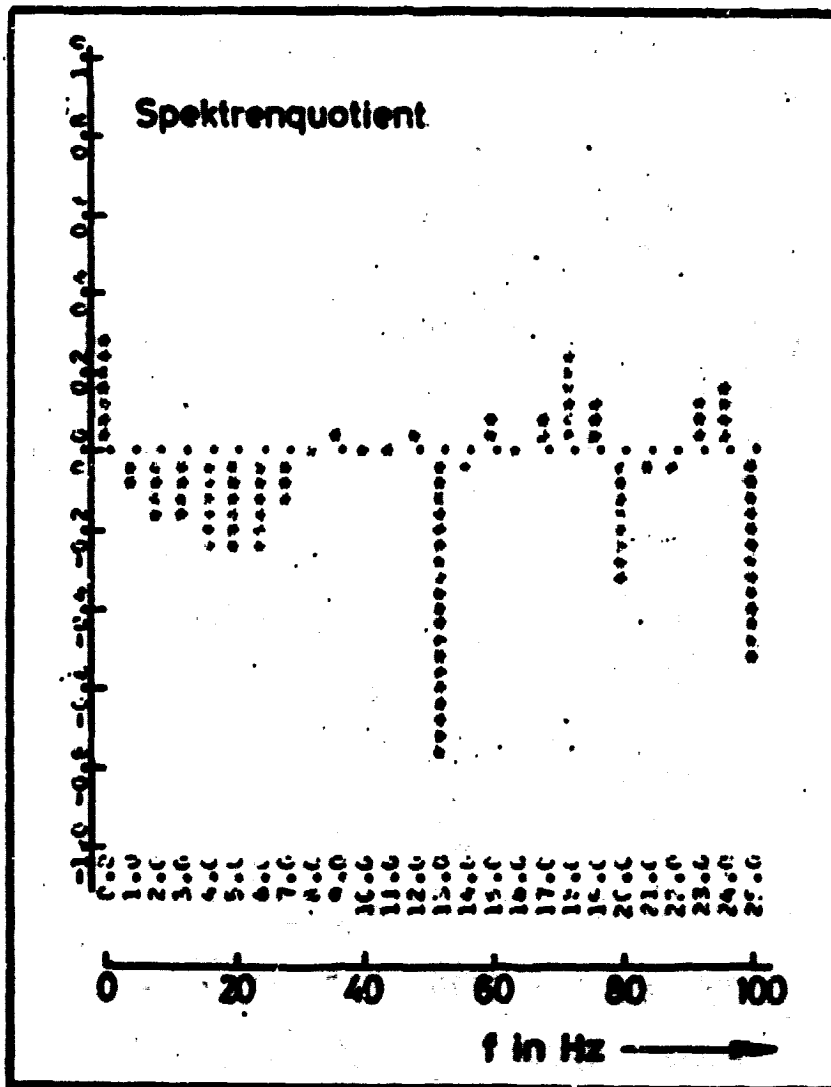


Abb. 24

in Abb. 25

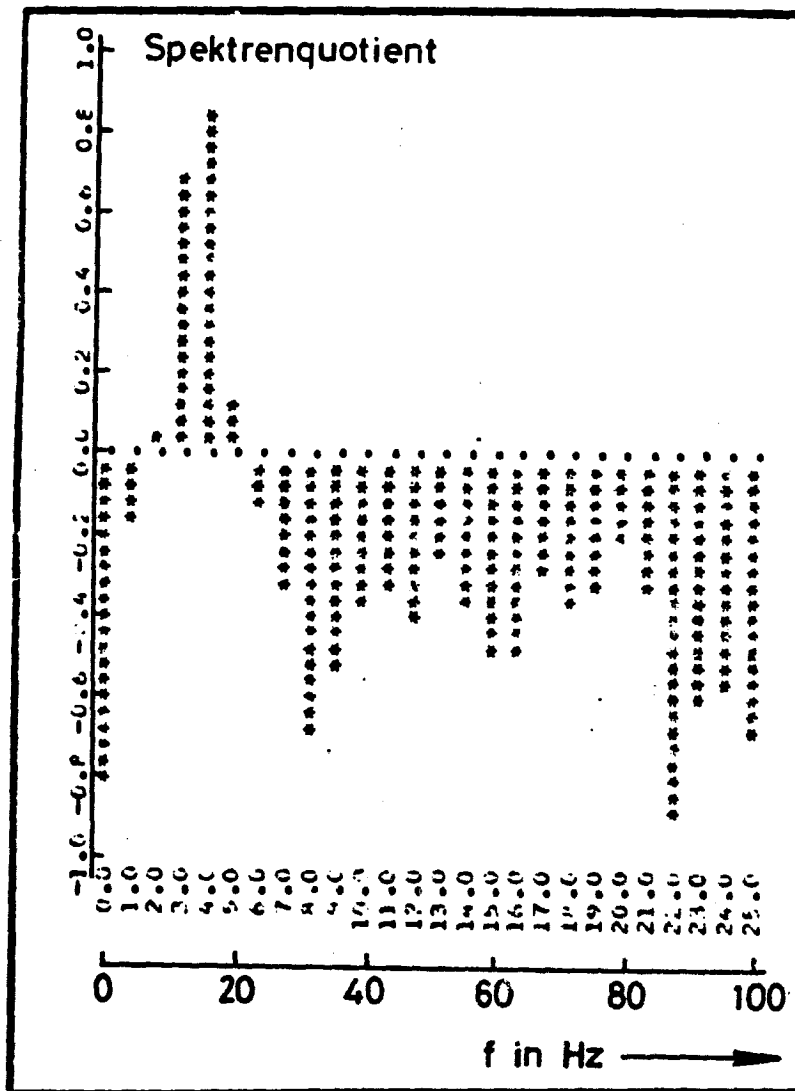


Abb. 25

Nur in wenigen Fällen zeigt sich der Verlauf wie erwartet, aber man wird - aufgrund der Erfahrungen an den anderen Beispielen - kein Vertrauen in solche Ergebnisse setzen.

Die Ursache des Versagens der einfachen Absorptionsbestimmung scheint in den Interferenzeffekten zu liegen, die die Spektren der seismischen Einsätze verfälschen und bestimmte Frequenzen

hervorheben, andere dagegen unterdrücken. Solche Interferenzeffekte haben ihre Ursache - wie zum Schluß von Kap. 6 erläutert - in Feinschichtungen (Lamellierung) innerhalb eines Schichtpaketes oder an den Schichtgrenzen selbst (vgl. Schema in Abb. 26). Derartige Feinschichtungen sind ja ohnehin das übliche Bild von sonic-logs.

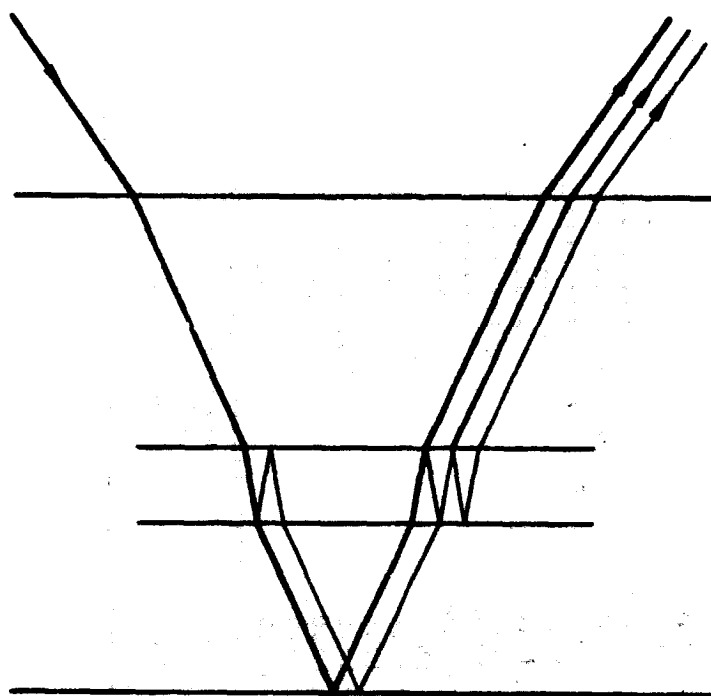


Abb. 26

Um diese Vorstellung vom Verfälschen des Spektrenquotienten durch Interferenzen von internen Multiplen zu untermauern, wurden modellseismische Messungen ausgewertet^{*)}. Hier hat man es definiert in der Hand, entweder mit einem einzigen Reflektor zu arbeiten oder durch Lamellierung Interferenzeinsätze zu erzeugen.

^{*)} Diese modellseismischen Messungen wurden vom Institut für Angewandte Geophysik, Petrologie und Lagerstättenforschung der TU Berlin ausgeführt und zur Bearbeitung überlassen.

In der Abb. 27 ist die Modellgeometrie aufgezeigt.

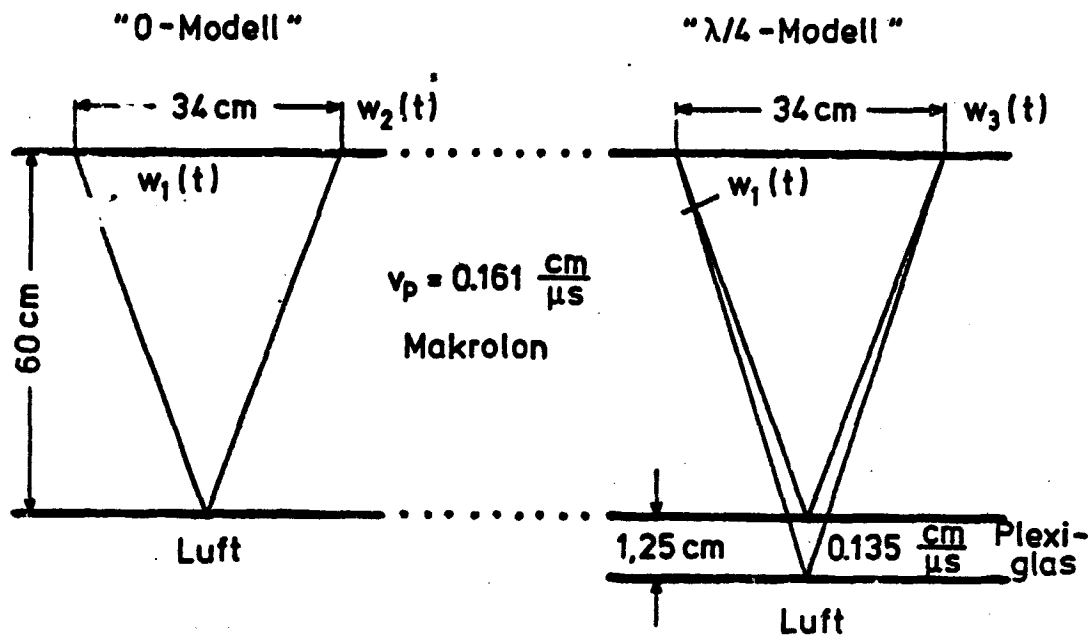


Abb. 27

Das Ausgangssignal $w_1(t)$ wird in unmittelbarer Nähe des Gebers aufgenommen, während der Aufnehmer in beiden Modellen den gleichen Abstand zum Geber hat. Die Modelle unterscheiden sich lediglich dadurch, daß im sog. "λ/4-Modell" an die Unterkante des Makrolons eine Plexiglaslamelle geklebt ist.

Das Ergebnis der Berechnung der Spektrenquotienten für das "0-Modell" und das "λ/4-Modell" zeigt die Abb. 28. Während der Spektrenquotient des "0-Modells" den Verlauf einer Geraden mit negativer Steigung zeigt (woraus man auf einen Q-Wert des Makrolon von ~ 20 schließt), zeigt der Spektrenquotient im Falle des "λ/4-Modells" aufgrund der Interferenzen ein völlig anderes Bild (obwohl doch die wesentlich absorbierende Schicht aus Makrolon die gleiche ist); der Verlauf ist nunmehr girlandenartig (entsprechend der Interferenzmaxima und -minima im Spektrum), und eine mittelnde Gerade würde eine Steigung haben, die "negativer Absorption" entspräche.

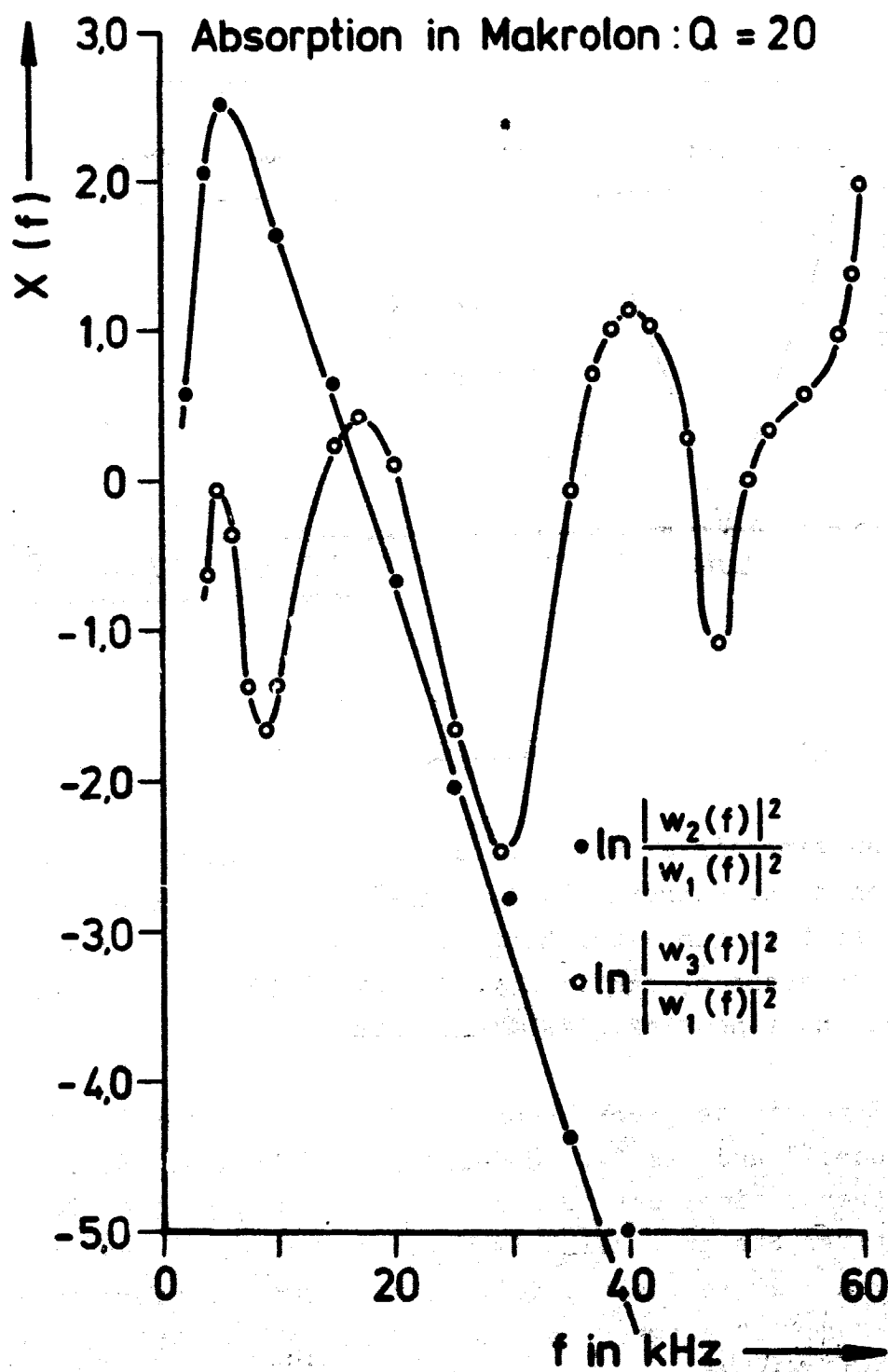


Abb. 28

Wir finden am Modell also unsere Vorstellung über das Versagen der einfachen Spektrendivisionsmethode durch Interferenzen bestätigt. Es bedarf kaum eines weiteren Hinweises, daß - schon allein wegen der geltenden Dispersionsrelationen - die Phasendifferenzmethode ebenso versagen muß, weil das Phasenspektrum durch Interferenzen verfälscht wird.

Es muß also Ziel aller weiteren Versuche sein, die Interferenzen aus den Spektren bzw. aus dem Spektrenquotienten zu eliminieren, um dann eine unverfälschte Absorptionsbestimmung vornehmen zu können.

7.3. "Stapeln" im Frequenzbereich

In der feldseismischen Praxis der Reflexionsseismik wird jeder Schuß von 24 (oder 48) Geophonen (bzw. genauer: Geophonbündelungen) aufgezeichnet. Der Abstand der einzelnen Spuren voneinander (und der der ersten Spur zum Schußpunkt) beträgt im allgemeinen 100 m, gelegentlich 50 m. Der seismische Impuls durchläuft für jede einzelne Spur mithin die Schichten, und damit auch die interferenzerzeugenden Lamellen, unter einem etwas anderen Winkel und damit werden auch die Laufwege ein wenig unterschiedlich lang. Daher müßten auch die Gangunterschiede der Interferenzen von Spur zu Spur verschieden sein, die Maxima und Minima im Spektrum liegen also für jede Spur an etwas anderen Frequenzen. Darauf beruht nun der Gedanke, daß man durch Summationsprozesse (also Mittelungsprozesse) über alle 24 Spuren die Interferenzeffekte herausmitteln könnte.

In mehreren, verschiedenen Beispielen wurde daher der Spektrenquotient für die gleichen seismischen Einsätze von Spur zu Spur berechnet und dann summiert (gemittelt). Bei der Summation wurde berücksichtigt, daß jede seismische Spur einen verschieden langen Laufweg im absorbierenden Medium zurücklegt, also von der Absorption ein wenig verschieden stark beeinflusst wird. Da dies in (7.1.11) durch die Laufzeitdifferenz Δt zum Ausdruck kommt, wurde die Absorption von Spur zu Spur dadurch "normiert", daß der Ausdruck

$$\frac{1}{\Delta t} X(\omega)$$

summiert wurde. Ein typisches Ergebnis zeigt die Abb. 29.

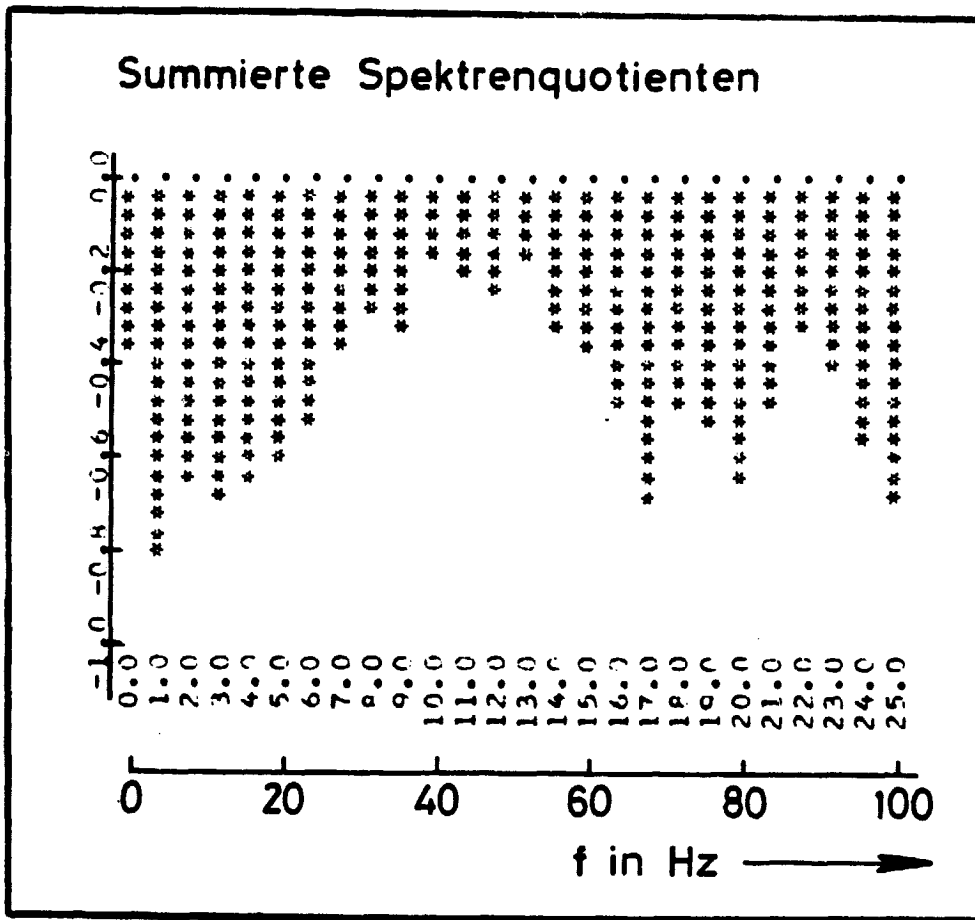


Abb. 29

Alle untersuchten Fälle zeigten ein ähnliches Bild, nämlich einen zwar insgesamt glatteren Verlauf des summierten Spektrenquotienten, verglichen mit den Einzel-Spektrenquotienten, jedoch ergibt sich keineswegs ein Verlauf, wie nach (7.1.11) zu erwarten, sondern es bildete sich oft ein Minimum um 30 ... 40 Hz heraus. Dies läßt sich eigentlich nur so erklären, daß sich offenbar bestimmte Interferenzerscheinungen durch die Mittelung herausheben, andere sich offenbar jedoch noch durch die Überlagerung verstärken.

Man muß sich natürlich auch überlegen, ob es überhaupt sinnvoll ist, eine Mittelung der Einzel-Spektrenquotienten vorzunehmen, in denen ja die einzelnen Spektren durch die Logarithmusoperation amplitudenverzerrt enthalten sind, oder ob man nicht erst die einzelnen Spektren mitteln mußte und dann erst den logarithmischen Spektrenquotienten bilden, um eine bevorzugte Ausglei-
chung der Interferenzeffekte zu erzielen.

Quantitativ betrachtet ergibt sich folgendes Bild: Wir betrachten als sehr vereinfachten Fall die Entstehung einer Interferenzerscheinung durch eine einzige Multiple; Entstehung und die geometrischen Verhältnisse gehen aus den beiden Abbildungen 30 und 31 hervor. Strahlbrechungseffekte sollen dabei vernachlässigt werden.

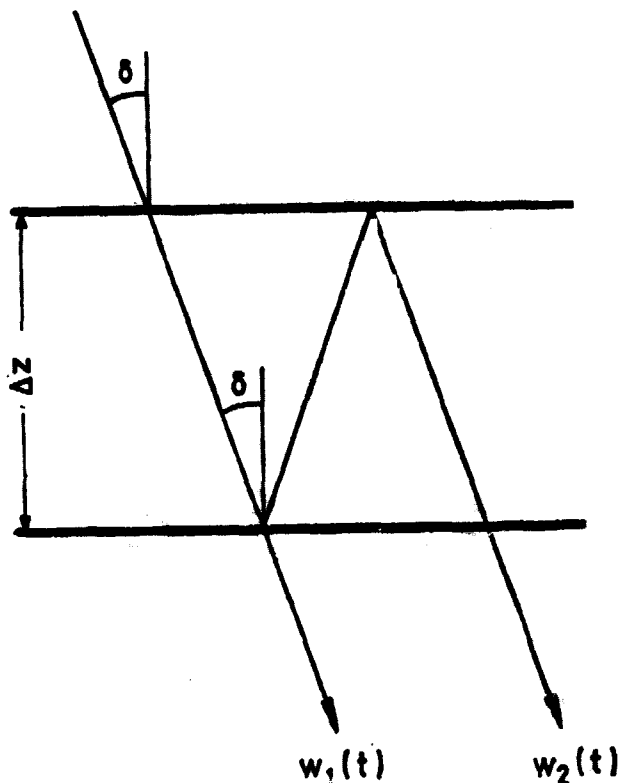


Abb. 30

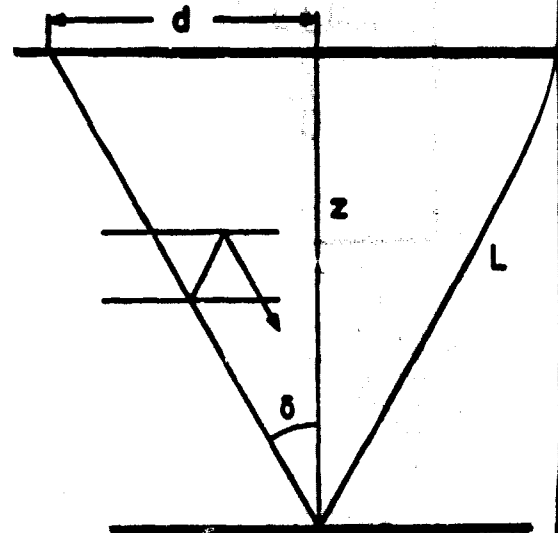


Abb. 31

Es ist $w_1(t)$ das interferenzfreie, direkt gelaufene wavelet und $w_2(t)$ die in einer Feinschichtungs-lamelle entstandene 1. Multiple. Dann ist

$$w_2(t) = w_1(t - \tau) \quad (7.3.1)$$

wobei τ die Laufzeit ist, die die Multiple $w_2(t)$ länger in der Lamelle verweilt als w_1 . Wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der wavelets sei, gilt für die Verweilzeit τ :

$$\tau = \frac{1}{c} \cdot \frac{2 \Delta z}{\cos \delta} \quad (7.3.2)$$

Aus der Strahlgeometrie leitet man ab, daß

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}} \quad (7.3.3)$$

ist, wo d der halbe Schußpunkt-Geophon-Abstand ist und L die halbe Strahlenlänge. Somit wird

$$\tau = \frac{1}{c} \cdot \frac{2 \Delta z}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}}} \quad (7.3.4)$$

Setzen wir nun das seismische Signal $s(t)$ aus $w_1(t)$ und $w_2(t)$ zusammen, wobei a die Amplitudenverminderung durch Reflexionsverluste bei $w_2(t)$ beschreibt,

$$s(t) = w_1(t) + a \cdot w_1(t - \tau) \quad (7.3.5)$$

so ergibt die Fouriertransformation (in der Definition im Sinne von (4.1.5) und (4.1.6))

$$s(\omega) = w_1(\omega) \cdot (1 + a \cdot e^{-i\omega\tau}) \quad (7.3.6)$$

wobei $w_1(\omega)$ die Fouriertransformierte von $w_1(t)$ sein soll. Der Ausdruck in den Klammern in (7.3.6) beschreibt den Einfluß (die Verfälschung) der einfachen Interferenz auf das komplexe Signalspektrum.

Beim Spektrenquotienten ist das quadratische Spektrum von Belang; es wird aus (7.3.6):

$$|s(\omega)|^2 = |r_0(\omega)|^2 \cdot [1 + a^2 + 2a \cos \omega \tau] \quad (7.3.7)$$

Im Fall der einfachen Interferenz wird also das "wahre" quadratische Spektrum mit einer periodischen Funktion moduliert; die Lage der Interferenzmaxima und -minima im Spektrum lässt sich angeben durch

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max} &= \frac{\pi}{\tau} \cdot n \\ \omega_{\min} &= \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{2n-1}{2} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.8)$$

und die "Periode" der Modulation im Frequenzbereich (der Frequenzabstand zwischen zwei Maxima oder Minima) ist

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\tau} \quad (7.3.9)$$

In dem hier interessierenden Zusammenhang der Frage der Spektrenmittelung über alle Spuren ("Stapeln" im Frequenzbereich) fragen wir nach der Größe der Verschiebung $\Delta\omega$ der Interferenzmaxima oder -minima im Spektrum von Spur zu Spur infolge des veränderten Gangunterschiedes; ω_m soll stehen für ω_{\max} oder ω_{\min} , dann wird diese Frequenzverschiebung:

$$\Delta\omega = \frac{d\omega_m}{d\tau} \cdot \Delta\tau \quad (7.3.10)$$

wobei $\Delta\tau$ der Unterschied des Gangunterschiedes von Spur zu Spur ist. Setzt man hierfür

$$\Delta\tau = \frac{d\tau}{d(d)} \cdot \Delta d \quad (7.3.11)$$

wo Δd der Spurabstand an der Erdoberfläche ist, so erhält man mit (7.3.8) und (7.3.4) für die relative Verschiebung:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_m} = \frac{1}{(1 - \frac{d^2}{L^2})} \cdot (-\frac{1}{L^2} \cdot d) \Delta d \quad (7.3.12)$$

Berücksichtigt man (7.3.3) und ersetzt

$$\cos^2 \varphi \approx 1 \quad \text{für Reflexionsseismik} \quad (7.3.13)$$

weil die Strahlen in tatsächlichen geometrischen Verhältnissen der Reflexionsseismik sehr steil einfallen, so erhält man näherungsweise:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_m} \approx - \frac{d \cdot \Delta d}{L^2} \quad (7.3.14)$$

Wir wollen nun eine realistische Zahlenabschätzung vornehmen.

Es sei $\Delta d = 100$ m und $L = 1000$ m (Größenordnung), so wird

(a) im schußnahen Bereich ist

$$d \approx \Delta d \quad (\text{Größenordnung}) \quad (7.3.15)$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_m} \approx 10^{-2} \quad (\text{Größenordnung}) \quad (7.3.16)$$

(b) im schußfernen Bereich ist

$$d \approx L \quad (\text{Größenordnung}) \quad (7.3.17)$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_m} \approx 10^{-1} \quad (\text{Größenordnung}) \quad (7.3.18)$$

Wir entnehmen diesen Abschätzungen eine Reihe von Schlußfolgerungen:

- 1.) Die relative Frequenzverschiebung der Interferenzmaxima und -minima von Spur zu Spur ist sehr klein aber, insbesondere im schußfernen Bereich, doch so groß, daß über mehrere Spuren hinweg deutliche Frequenzverschiebungen merkbar werden, die gewisse Mittelungseffekte beim

Spektrensummieren haben können. Die Verschiebung ist aber nicht groß genug, um eine rein statistische Mittelung zu ergeben, systematische Effekte könnten bei der Summation eine Rolle spielen.

- 2.) Die relative Frequenzänderung des Interferenzbildes, ist es, die allein von der Geometrie abhängt. Deshalb werden die Interferenzen, deren Abstand ja konstant ist (7.3.9), im Bereich hoher Frequenzen eher herausgemittelt als bei niedrigen Frequenzen.
- 3.) Die Frequenzverschiebung des Interferenzbildes im Spektrum ist (gemäß (7.3.14)) im schußfernen Bereich erheblich größer als im schußnahen. Bei einer Mittelung der Spektren (oder des Spektrenquotienten) müßten deshalb die einzelnen Spuren mit "statistischen" Gewichten versehen werden, weil nämlich die Mittelung über die schußfernen Spuren eher die Tendenz der Ausgleichung der Interferenzen hat, während die Mittelung über die schußnahen Spuren - bei denen die Interferenzen kaum verlagert sind - eher die Tendenz zur Hervorhebung der Strukturen hat.

Abschließend läßt sich feststellen, daß eine rein statistische Spektrenmittelung über alle Spuren bei der Kleinheit der Verschiebung des Interferenzmusters kaum zu befriedigenden Resultaten führen kann. Grundsätzlich gesehen ist eine Ausnutzung dieses Verschiebungseffektes zur Eliminierung der Interferenzen durchaus denkbar, wenn man die Interferenzerscheinung und ihre Frequenzverlagerung mehr als nur statistisch ausnutzt, d.h. von (7.3.14) und von der Phänomenologie (7.3.7) bei der Analyse Gebrauch macht; die Verschiebungsformel (7.3.14) gilt ja so für alle, auch durch mehr als nur zwei Strahlen erzeugte Interferenzen, während in (7.3.7) nur ganz analoge Terme hinzukommen.

Man könnte auch versuchen, üblich gestapelte (d.h. im Zeitbereich summierte) seismische Signale anstatt Einzelspuren zu verwenden. Dagegen spricht zunächst, daß man hierbei alle

Einsätze zusammenfaßt, die auf verschieden langen Wegen L die Schichten durchlaufen haben, also auch von der Absorption dieser Schichten verschieden stark beeinflusst wurden. Für große Reflexionstiefen mag dieses Argument nicht so gravierend sein. Dagegen spricht aber auch, daß die Systematik der Interferenzen sehr unüberschaubar wird: Denkt man sich das üblich gestapelte Signal fouriertransformiert, so setzt es sich aus der Summe der komplexen Spektren der Einzelspuren zusammen, von denen jedes wie (7.3.6) interferenzbehaftet ist. Bildet man dann das quadratische Spektrum, so entstehen Produkte mit "Vermischungen" der Interferenzmuster aus den einzelnen Spuren. Erst wenn die Tiefe so besonders groß im Vergleich zur Geophonauslage ist, daß die Frequenzverschiebung der Interferenzen über alle Spuren nahezu Null ist (alle Spuren also das gleiche Interferenzbild haben), läßt sich ausklammern und ein Ausdruck vom Typ (7.3.7) für das Spektrum der im üblichen Sinne gestapelten Spur gewinnen.

7.4. Auto- und Kreuzkovarianzfunktion

Betrachten wir die Darstellung eines seismischen Impulses durch (4.3.14) mit der Übertragungsfunktion (4.3.10), so wird deutlich, daß aus dem Spektrum des seismischen Impulses bevorzugt die hohen Frequenzen herausgedämpft werden, eine Folge des Faktors

$$\exp \left(- \frac{|\omega|}{2} \int_0^L \frac{ds}{Q(s) c_0(s)} \right)$$

in der Übertragungsfunktion. Seismische Einsätze, die eine größere Dämpfung erlitten haben, enthalten also weniger hochfrequente Anteile im Spektrum (das spektrale Schwergewicht liegt bei tieferen Frequenzen) als solche Einsätze, die nur geringe Dämpfung erlitten haben, etwa weil sie aus geringer Tiefe reflektiert wurden. Wegen des stärkeren Gehalts an tiefen Frequenzen wird man also erwarten, daß die Autokovarianzfunktion des Einsatzes mit der größeren Dämpfung breiter ist als die Autokovarianzfunktion des Einsatzes mit der kleineren Dämpfung. Man könnte also versuchen, aus der Veränderung der "Breite" der Kovarianzfunktionen auf die Absorption des zwischen den Einsätzen liegenden Schichtpaketes, aus denen Kovarianzfunktionen gerechnet wurden, zu schließen.

Darüber hinaus lassen sich auch Kreuzkorrelationen zwischen den verschiedenen Einsätzen berechnen; man könnte hoffen, daß bei der Kreuzkorrelation all diejenigen den Spektren überlagerten Strukturen unterdrückt werden, die nicht in beiden Signalen gleichartig enthalten sind.

Da die Bildung von Kovarianzfunktionen ein integraler Prozeß ist, darf man damit rechnen, daß alle Einflüsse der statistischen Streuung (noise) ausgeglättet werden; dies sollte auch auf die Interferenzstrukturen zutreffen, sofern diese nicht zu einschneidend sind.

Wir denken uns zwei Einsätze $S_1(t)$ und $S_2(t)$ als Reflexionen aus verschiedener Tiefe (vgl. Abb. 17). Beide Einsätze werden dargestellt in der Form durch (4.3.14). Dann bilden wir folgende Kovarianzfunktionen:

$$K_{11}(\hat{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot s_1(t - \hat{t}) dt \quad (7.4.1)$$

$$K_{22}(\hat{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) \cdot s_2(t - \hat{t}) dt \quad (7.4.2)$$

$$K_{12}(\hat{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot s_2(t - \hat{t}) dt \quad (7.4.3)$$

Wir setzen nun die Spektraldarstellungen für $S_1(t)$ und $S_2(t)$ nach (4.3.14) ein und berücksichtigen (7.1.5) und (7.1.6). Die Kovarianzfunktionen stehen dann zunächst als 3-fach-Integrale da, mit Integration über t (aus (7.4.1), (7.4.2) und (7.4.3)) und über zwei Frequenzvariable ω und $\hat{\omega}$ (aus den Spektraldarstellungen für $s(t)$ und $s(t - \hat{t})$). Integriert man nun zunächst über t , so entsteht die δ -Funktion $2\pi \cdot \delta(\omega + \hat{\omega})$, die eine weitere Integration, z.B. diejenige über $\hat{\omega}$ erlaubt. Man erhält dann:

$$K_{11}(\hat{t}) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |a_1|^2 \cdot |g(\omega)|^2 \cdot |A(\omega)|^2 \cdot |\hat{U}_1(\omega, L_1)|^2 \cdot e^{i\omega\hat{t}} d\omega \quad (7.4.4)$$

$$K_{22}(\hat{t}) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |a_2|^2 \cdot |g(\omega)|^2 \cdot |A(\omega)|^2 \cdot |\hat{U}_2(\omega, L_2)|^2 \cdot e^{i\omega\hat{t}} d\omega \quad (7.4.5)$$

$$K_{12}(\hat{t}) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} a_1 a_2^* \cdot |g(\omega)|^2 \cdot |A(\omega)|^2 \cdot \hat{U}_1(\omega, L_1) \cdot \hat{U}_2^*(\omega, L_2) e^{i\omega\hat{t}} d\omega \quad (7.4.6)$$

Die Autokovarianzfunktionen (7.4.4) und (7.4.5) können nun noch in Integrale über nur positive Frequenzen umgeschrieben werden, indem man ausnutzt, daß für die Fourierkomponenten ja gilt

$$\left. \begin{aligned} |A(-\omega)|^2 &= |A(\omega)|^2 \\ |g(-\omega)|^2 &= |g(\omega)|^2 \\ |\ddot{u}(-\omega, L)|^2 &= |\ddot{u}(\omega, L)|^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4.7)$$

Benutzen wir noch, daß mit (4.1.10) gilt

$$|\ddot{u}(\omega, L)|^2 = e^{-\omega \cdot \int_0^L \frac{ds}{Q(s) \cdot c_n(s)}} \quad (7.4.8)$$

(für positive Frequenzen) und verwenden wir (7.1.8), (7.1.9) und (7.1.10), so daß wird:

$$|\ddot{u}_2(\omega, L_2)|^2 = |\ddot{u}_1(\omega, L_1)|^2 \cdot e^{-\frac{\omega}{Q_2} \cdot \Delta t} \quad (7.4.9)$$

und kürzen wir schließlich ab

$$|W(\omega)|^2 = |g(\omega)|^2 \cdot |A(\omega)|^2 \cdot |\ddot{u}_1(\omega, L_1)|^2 \quad (7.4.10)$$

so erhalten wir:

$$K_{11}(\hat{t}) = 4\pi |a_1|^2 \cdot \int_0^\infty |W(\omega)|^2 \cdot \cos(\omega \hat{t}) d\omega \quad (7.4.11)$$

$$K_{22}(\hat{t}) = 4\pi |a_2|^2 \cdot \int_0^\infty |W(\omega)|^2 \cdot e^{-\frac{\omega}{Q_2} \cdot \Delta t} \cdot \cos(\omega \hat{t}) d\omega \quad (7.4.12)$$

Die Kreuzkovarianzfunktion ist schwieriger umzuformen. Ihr Spektrum ist komplex und daher ergibt die Umschreibung auf nur positive Frequenzen außer $\cos(\omega\hat{t})$ -Termen auch $\sin(\omega\hat{t})$ -Terme, was für die praktische Rechnung bedeutet, daß das Maximum von $K_{12}(\hat{t})$ nicht bei $\hat{t} = 0$ liegt. Außerdem enthält die Kreuzkovarianzfunktion $K_{12}(\hat{t})$ auch den Einfluß der Dispersion.

Der erwartete Effekt der Verbreiterung der Autokovarianzfunktion für den seismischen Einsatz, der aus der größeren Tiefe kommt, also stärkeren Absorptionseffekt erlitten hat, ersehen wir direkt aus (7.4.11) und (7.4.12). Betrachten wir $K_{11}(\hat{t})$ als eine mit der Spektralfunktion $|W(\omega)|^2$ "gewichtete Summe" von $\cos(\omega\hat{t})$ -Funktionen, so enthält die entsprechende "Gewichtsfunktion" in $K_{22}(\hat{t})$, also $|W(\omega)|^2 \cdot e^{-\frac{\omega}{Q_2} \cdot \Delta t}$, weniger hochfrequente Anteile (die durch $\exp(-\frac{\omega}{Q_2} \cdot \Delta t)$ abgeschwächt werden) und damit wird die Ergebnisfunktion niederfrequenter, über \hat{t} aufgetragen also breiter.

In den Abbildungen 32, 33, 34 sind die Autokovarianzfunktionen für 3 Einsätze aus einer Einzelspur eines seismischen Profiles in Norddeutschland dargestellt. Die Einsätze sind mit 140 msec Länge ausgeschnitten, sie enthalten bei 2 msec samplingrate also 70 Werte. Ihre Benennung mit Ziffern 1, 2, 3 entspricht zunehmender Reflexionstiefe (Start 1: 1128 msec, Start 2: 2364 msec, Start 3: 3288 msec). Die (nicht auf 1 normierten) Kovarianzfunktionen sind über dem time-lag \hat{t} in Einheiten von 2 msec aufgetragen.

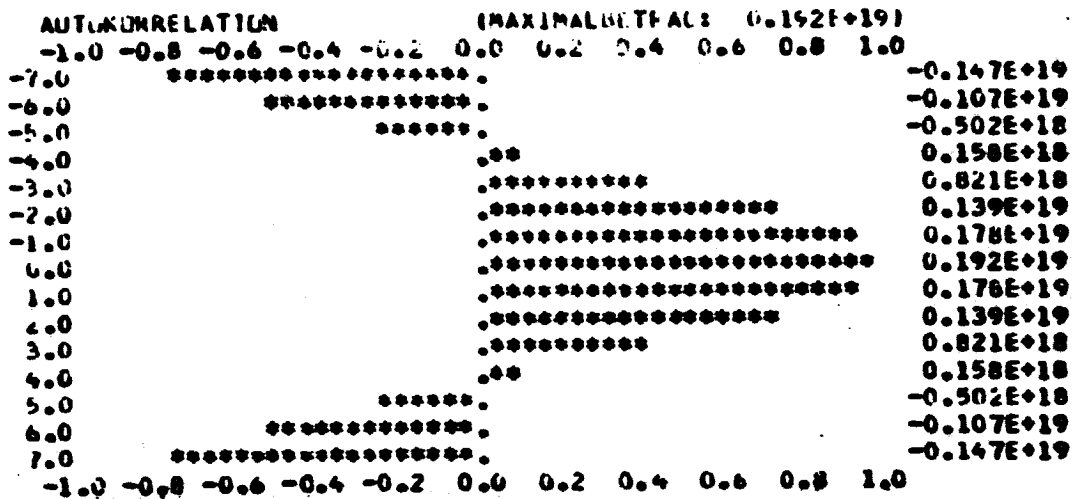


Abb. 32: Autokovarianzfunktion von Einsatz 1

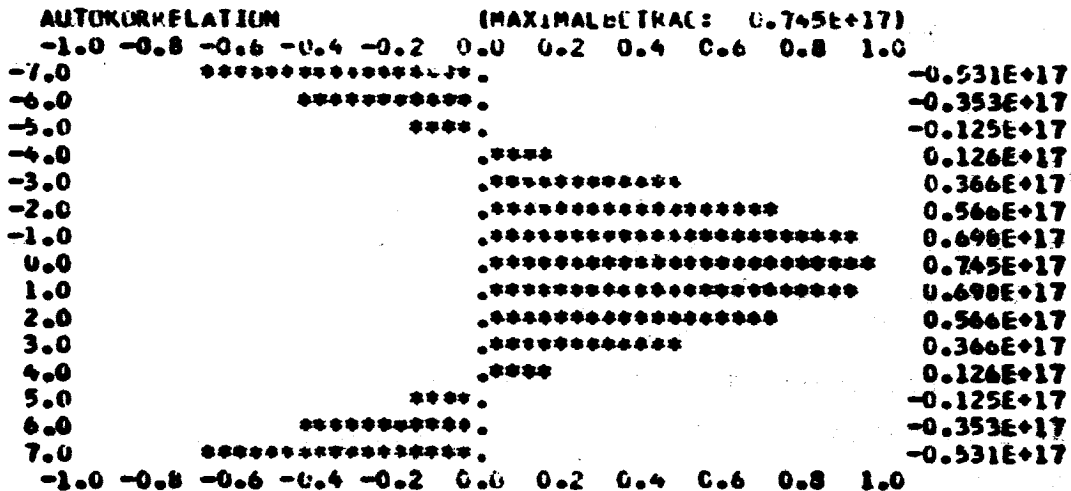


Abb. 33: Autokovarianzfunktion von Einsatz 2

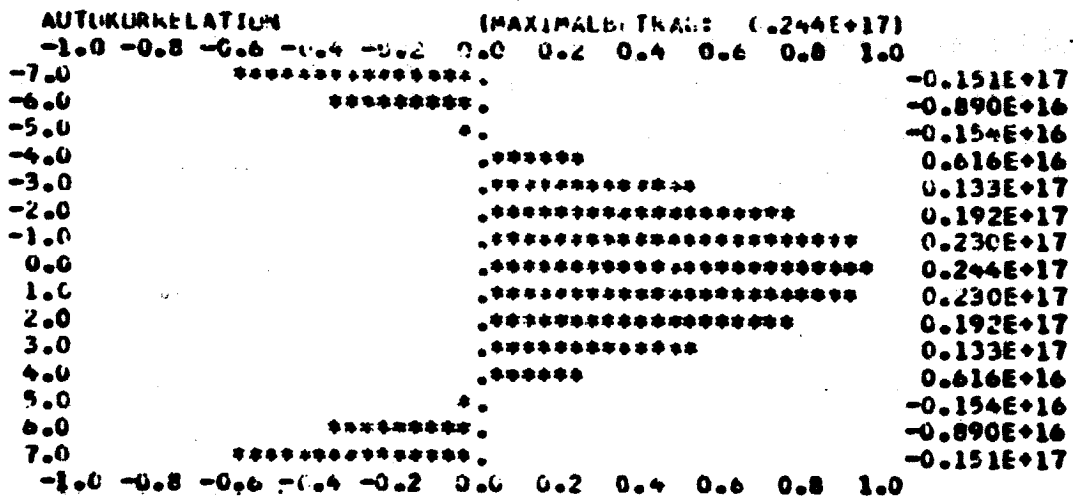


Abb. 34: Autokovarianzfunktion von Einsatz 3

Die graphischen Auftragungen der Autokovarianzfunktion ("Sternchenplott") sind auf 1 normiert; deshalb kann man hier direkt die Verbreiterung aufgrund der Absorption mit zunehmender Tiefe sehen: man vergleiche etwa die Nulldurchgänge. Als quantitatives Maß für die Breite der Kovarianzfunktion betrachtet man etwa die Krümmung des Funktionsverlaufes um die Stelle $\hat{t} = 0$ herum; in diesem Bereich ist auch der Einfluß der endlichen Datenlänge auf die numerische Berechnung der Kovarianzfunktionen am wenigsten von Einfluß. Zur Bestimmung der Krümmung berechnet man die "zweiten Differenzen" (zweite Ableitung), wobei man allerdings auf $K_{11}(0) = K_{22}(0) = 1$ normieren muß. Aus den in den Abbildungen 32, 33, 34 angegebenen Funktionswerten errechnet man als "zweite Differenz" Δ^2 :

$$\text{Einsatz 1 :} \quad \Delta^2 = 0,1146$$

$$\text{Einsatz 2 :} \quad \Delta^2 = 0,1007 \quad (7.4.13)$$

$$\text{Einsatz 3 :} \quad \Delta^2 = 0,0943$$

Auch in diesen Zahlenwerten kommt deutlich die Verbreiterung der Autokovarianzfunktion in Form einer Abnahme der 2. Ableitung (Krümmung) in der Umgebung von \hat{t} zum Ausdruck.

In den folgenden drei Abbildungen 35, 36, 37 sollen noch - der Vollständigkeit halber - die Kreuzkovarianzfunktionen vorgestellt werden.

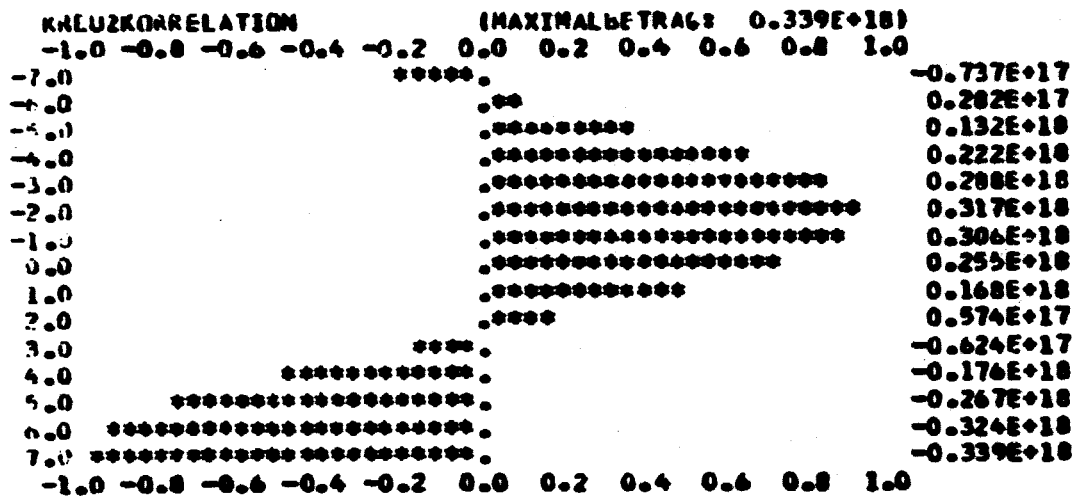


Abb. 35: Kreuzkovarianzfunktion von Einsatz 1 und Einsatz 2

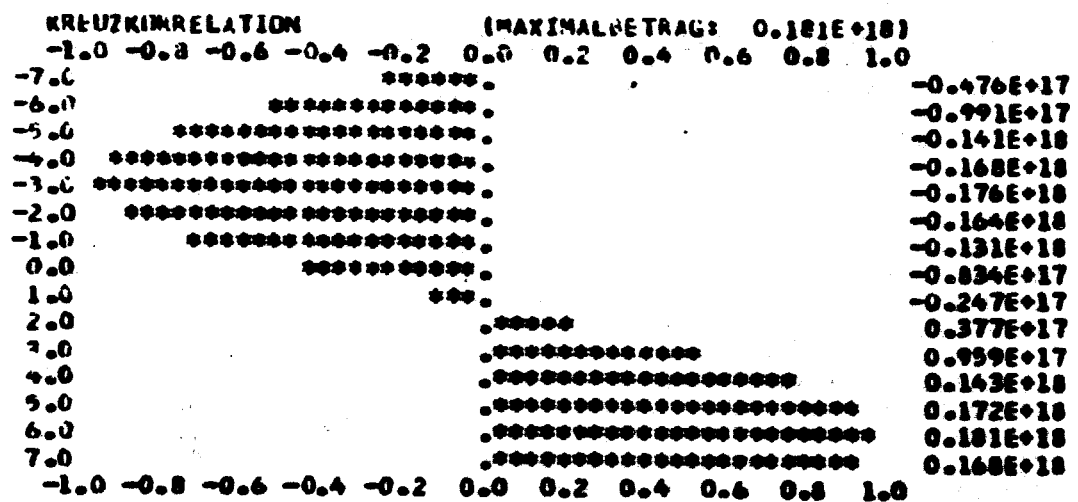


Abb. 36: Kreuzkovarianzfunktion von Einsatz 1 und Einsatz 3

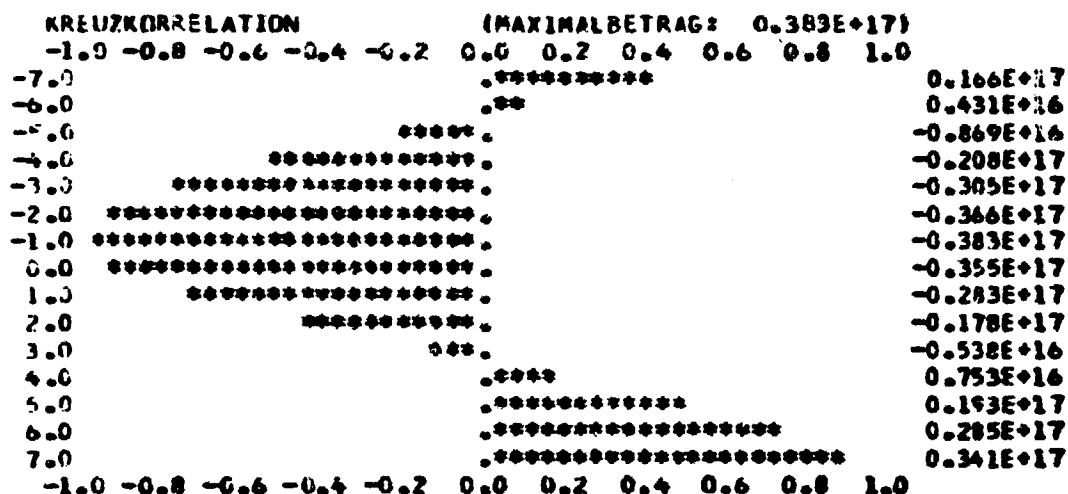


Abb. 37: Kreuzkovarianzfunktion von Einsatz 2 und Einsatz 3

Auch die Kreuzkovarianzfunktionen verbreitern sich, je mehr sie sich aus Einsätzen aus größerer Tiefe, d.h. stärkerem Absorptionseinfluß, zusammensetzen. Formal kann man dies verstehen, wenn man in (7.4.6) in den Übertragungsfunktionen den ohnehin schwachen Einfluß der Dispersion einmal vernachlässigt; dann erhält das Amplitudenspektrum nämlich, wenn man etwa noch (7.4.10) verwendet, einen Beifaktor vom Typ $\exp(-\frac{\omega}{2Q} \cdot \Delta t)$. Dementsprechend werden die "zweiten Differenzen" Δ^2 (normiert auf Maximalamplitude = 1):

$$\begin{aligned}
 \text{Einsatz 1 und Einsatz 2} &: \Delta^2 \approx 0,1180 \\
 \text{Einsatz 1 und Einsatz 3} &: \Delta^2 \approx 0,1105 \quad (7.4.14) \\
 \text{Einsatz 2 und Einsatz 3} &: \Delta^2 \approx 0,1148
 \end{aligned}$$

Grundsätzlich sind jedoch die Verhältnisse bei der Kreuzkovarianzfunktion wegen der dispersiven Glieder und wegen des Auftretens gemischter Glieder in bezug auf die Absorption komplizierter und daher weniger überschaubar als bei den Autokovarianzfunktionen.

Bei der Bearbeitung größerer Mengen von seismischen Daten in Hinblick auf die Autokovarianzfunktion zeigte sich, daß in einer größeren Zahl von Fällen die Verbreiterung des Funktionsverlaufes, ausgedrückt durch die zweite Ableitung um $\hat{t} = 0$ herum, sich nicht so systematisch ergibt, wie dies zu erwarten ist und wie es das vorgestellte Beispiel in (7.4.13) zeigt. Die Frage nach der Ursache des unerwarteten Verhaltens stellt sich nach den Erkenntnissen aus Kap. 7.2 als Frage nach dem Effekt von Interferenzen auf die Gestalt der Kovarianzfunktionen.

Einer gewissen Verallgemeinerung von (7.3.5) entsprechend setzen wir als Einsätze an:

$$s_1(t) = \sum_i a_i \cdot w_1(t + \tau_i) \quad (7.4.15)$$

$$s_2(t) = \sum_k b_k \cdot w_2(t - z_k) \quad (7.4.16)$$

wobei die Zeitverschiebungen

$$\tau_i \ll t \quad z_k \ll t \quad (7.4.17)$$

τ_i und z_k sind die kleinen Zeitverschiebungen der interferenzfreien, originalen Einzelanteile w in den interferenzbehafteten Einsätzen $s(t)$. Die Kovarianzfunktionen enthalten nun eine Doppelsumme über alle Interferenzanteile:

$$K_{11}(\hat{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot s_1(t - \hat{t}) dt \quad (7.4.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sum_j a_i a_j w_1(t + \tau_i) \cdot w_1(t + \tau_j - \hat{t}) dt \quad (7.4.19)$$

Entsprechend für $K_{22}(\hat{t})$ und $K_{12}(\hat{t})$. Folgt man nun dem Rechengang ganz analog wie zu den Ergebnissen (7.4.4), (7.4.5),

(7.4.6), so erhält man (mit Abkürzung (7.4.10)):

$$K_{11}(\hat{t}) = 2\pi \sum_{i,j} a_i a_j \int_{-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 |W(\omega)|^2 \cdot e^{i\omega(\tau_i - \tau_j) - i\omega \hat{t}} d\omega \quad (7.4.20)$$

$$K_{22}(\hat{t}) = 2\pi \sum_{k,l} b_k b_l \int_{-\infty}^{+\infty} |a_2|^2 |W(\omega)|^2 \cdot e^{-\frac{\omega}{Q_2} \cdot \Delta t} \cdot e^{i\omega(\tau_k - \tau_l) - i\omega \hat{t}} d\omega \quad (7.4.21)$$

$$K_{12}(\hat{t}) = 2\pi \sum_{i,k} a_i b_k \int_{-\infty}^{+\infty} (a_i \cdot a_k^*) \cdot |W(\omega)|^2 \cdot l(-\omega, L_2 - L_1) \cdot e^{i\omega(\tau_i - \tau_k) - i\omega \hat{t}} d\omega \quad (7.4.22)$$

Für die weitere Betrachtung wollen wir uns auf die Autokovarianzfunktionen beschränken und - da es uns jetzt nur um den Effekt der Interferenzen geht - stellvertretend nur $K_{11}(\hat{t})$ betrachten. Wir führen als abkürzende Bezeichnung ein:

$$\tau_{ij} = \tau_i - \tau_j \quad (7.4.23)$$

und formen (7.4.20) - wie (7.4.11) und (7.4.12) - auf eine Integration über nur positive Frequenzen um; dies ergibt:

$$K_{11}(\hat{t}) = 4\pi \sum_{i,j} a_i a_j \int_0^{\infty} |a_i|^2 \cdot |W(\omega)|^2 \cdot \cos[\omega(\hat{t} + \tau_{ij})] d\omega \quad (7.4.24)$$

Betrachtet man sich das Entstehen der $\sum_{i,j}$ in (7.4.19), so überlegt man sich leicht, daß es zu jedem Summenglied mit $i \neq j$ ein zweites gibt, bei dem i und j vertauscht sind. Es tritt also einmal in (7.4.24) ein Summenglied mit

$$\tau_{ij} = \tau_i - \tau_j$$

und ein zweites Mal ein gleiches Summenglied auf, jedoch mit

$$\tau_{ji} = \tau_j - \tau_i = -\tau_{ij}. \quad (7.4.25)$$

Teilt man die Doppelsumme in (7.4.24) so auf, daß jedes Summenglied mit gleichem (i,j) nur einmal auftritt, so schreibt man:

$$K_{11}(\hat{t}) = 4\pi \sum_{i,j \leq i} a_i a_j \left\{ \int_0^{\infty} |a_i|^2 \cdot |W(\omega)|^2 \cdot \cos[\omega(\hat{t} + \tau_{ij})] d\omega \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} |a_i|^2 \cdot |W(\omega)|^2 \cdot \cos[\omega(\hat{t} - \tau_{ij})] d\omega \right\} \quad (7.4.26)$$

Der Ausdruck (7.4.26) zeigt uns nun deutlich den Effekt der Interferenzen: Die Autokovarianzfunktion besteht für jede einzelne Interferenz aus einer Summe von zwei Autokovarianzfunktionen des Typs (7.4.11), mit ihrem Korrelationsmaximum jedoch von $\hat{t} = 0$ verschoben auf die Stellen $\hat{t} + \tau_{ij} = 0$ und $\hat{t} - \tau_{ij} = 0$, also auf $\hat{t} = +\tau_{ij}$ und $\hat{t} = -\tau_{ij}$. Die Summe aus beiden ist die zu einer einzigen Interferenz gehörende Autokovarianzfunktion. In Abb. 38 wird dies (schematisch) anschaulich dargestellt^{*)}:

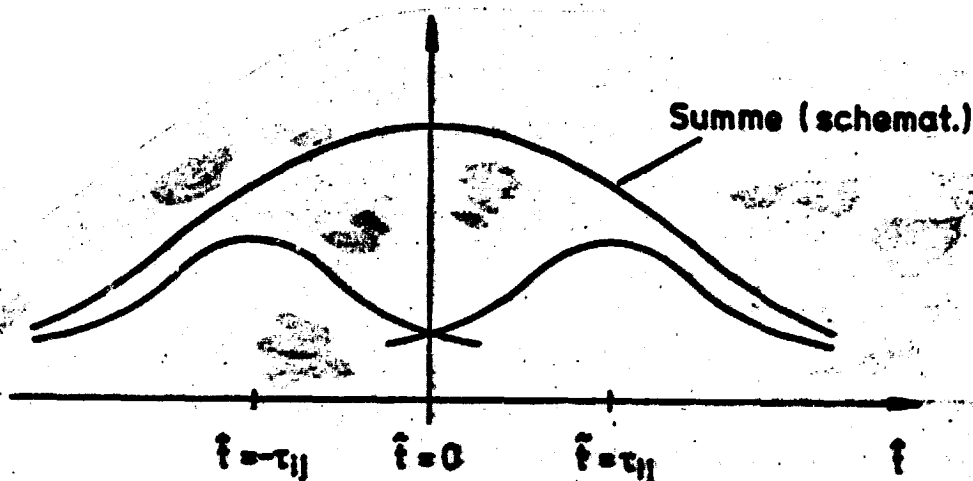


Abb. 38

^{*)} Die Verschiebungen τ_{ij} wurden in der Abbildung übertrieben groß gezeichnet, so daß die τ_{ij} Summenfunktion in der Abb. 38 eigentlich eine Einsattelung hätte. In Praxis sind die τ_{ij} jedoch klein gegen die Breite der Autokovarianzfunktion.

Man versteht daraus, daß die Interferenzen den Effekt einer Verbreiterung der Autokovarianzfunktion gegenüber der aus interferenzfreien Einsätzen berechneten Autokovarianzfunktion haben. Damit ist es unmöglich, aus der Breite der Autokovarianzfunktion auf die Absorption zu schließen, wenn Interferenzen - wie in der Praxis so häufig - vorliegen.

Durch Anwendung der Additionstheoreme auf (7.4.26) kann man umformen zu:

$$K_{a_i}(\hat{t}) = 2\pi |a_i|^2 \sum_{i,j \leq i} a_i a_j \int_0^{\infty} |W(\omega)|^2 \cdot \cos(\omega \tau_{ij}) \cdot \cos(\omega \hat{t}) d\omega \quad (7.4.27)$$

Man kann nun, statt das quadratische Spektrum durch eine direkte Fouriertransformation zu berechnen (wie in Kap. 7.1., 7.3 und 7.6 vorgenommen) auch den Weg gehen, dieses als Cosinus-Transformierte der Autokovarianzfunktion zu berechnen. Aus (7.4.27) gewinnen wir das mit der Interferenzen-Modulation versehene Spektrum, im Sinne von (7.3.7) zu:

$$|S(\omega)|^2 = |a_i|^2 \cdot \sum_{i,j \leq i} a_i a_j |W(\omega)|^2 \cdot \cos(\omega \tau_{ij}) \quad (7.4.28)$$

Grässl, S. und P. Finger [1975] schlagen aus mehreren Gründen vor, diesen Weg zu bevorzugen: Wenn man relativ lange Zeitausschnitte aus der seismischen Einzelspur wählt (Grässl und Finger wählen Beispiele mit 600 msec und 500 msec, in dieser Arbeit wurde - mit Ausnahme der Tiefenreflexionen, vgl. S. 224, - mit 140 msec ausgeschnitten, was in der Praxis eine typische waveletlänge ist), so werden innerhalb des ausgeschnittenen Zeitabschnittes die verschiedenen Einsätze und die Multiplen gewissen statistischen Eigenschaften genügen und die Interferenzen-Modu-

lationen

$$\sum_{i,j \in I} a_i a_j \cos(\omega_i - \omega_j)$$

(7.4.29)

werden sich gegenseitig überlagern und "mitteln", so daß $|S(\omega)|^2$ nurmehr eine Schwankung um den interessierenden Verlauf $|W(\omega)|^2$ herum aufweist. Dafür muß man sich, wegen des langen Zeitausschnittes, mit "mittleren Aussagen" über die Absorption begnügen. Grässl und Finger zeigen in ihren Betrachtungen weiter, daß bei dieser Methode der Spektrenschätzung die Wahl des Spektralfensters ("Tapering") sehr entscheidend für die Streuung der berechneten Leistungsspektren ist. Schließlich weisen Grässl und Finger darauf hin, daß bei Anwendung einer direkten Fouriertransformation (z.B. FFT) das so berechnete quadratische Spektrum bei Vergrößerung der Intervalllänge nicht konvergiert (die Streuung nicht abnimmt), wenn man etwa einen stochastischen Prozeß als Zeitreihe annimmt (seismische Spur als Realisierung eines Zufallsprozesses); die Streuung des durch direkte Fouriertransformation berechneten Spektrums von Zufallszahlen (es sollte gegen ein "weißes Spektrum" konvergieren) nimmt - wie Grässl und Finger an Beispielen in ihrer Arbeit zeigen - eben nicht ab, sondern bleibt gleich trotz vergrößerter Zeitausschnittlänge.

In Betracht dieser Argumente könnte vielleicht eine Berechnung der quadratischen Spektren über die Autokovarianzfunktion mit geeignetem Spektralfenster und daran angeschlossen ein homomorphes Filtern der vereinfachten Art (d.h. nur für das Amplitudenspektrum gemäß Abb. 45), vgl. Kap. 7.6, eine optimale Kombination zur Berechnung von Spektrenquotienten sein.

7.5. Methode der Modellspektren

Bereits bei den Überlegungen, die Absorption aus den Kovarianzfunktionen zu gewinnen, war die Frage nach einer plausiblen Modellannahme über die Form des quadratischen Spektrums eines Einsatzes entstanden. Wollte man nämlich, wie in Kap. 7.4. eingeführt, die Veränderung der Krümmung (d.h. der zweiten Ableitung) der Autokovarianzfunktion (7.4.11) und (7.4.12) im Bereich um $\hat{t} = 0$ herum untersuchen und mit der Absorption in Zusammenhang bringen, so müßte man die Integrale im Bereich $\hat{t} = 0$ auswerten ($\cos \omega \hat{t}$ dazu ggf. bis zum quadratischen Glied entwickeln). Eine Auswertung der Integrale ist aber - auch näherungsweise - nur möglich, wenn man gewisse Modellannahmen über $|W(\omega)|^2$ macht.

Die Frage nach einer physikalisch vernünftigen Annahme über das quadratische Spektrum ist aber von breiterem Interesse; insbesondere kann es zu einer direkten Methode der Absorptionsbestimmung entwickelt werden.

Wir gehen aus von (4.3.14) und betrachten das quadratische Spektrum eines seismischen Impulses:

$$|S(\omega)|^2 = |R(\omega)|^2 \cdot |D(\omega)|^2 \cdot |g(\omega)|^2 \cdot |A(\omega)|^2 \cdot |\ddot{u}(\omega, L)|^2 \quad (7.5.1)$$

Dabei betrachten wir als erstes die Reflexions- und Transmissionseffekte als näherungsweise frequenzunabhängig (7.1.5), (7.1.6), also:

$$|R(\omega)|^2 \cdot |D(\omega)|^2 = |a|^2 \quad (7.5.2)$$

Ferner betrachten wir $g(\omega)$ als konstant im interessierenden Frequenzbereich, d.h. in dem Frequenzbereich, in dem der seismische Impuls wesentliche Amplituden hat. Daß zumindest die wesentlichen Signalfrequenzen im Durchlaßbereich der Geophone liegen, sieht

man daran, daß bei der Berechnung quadratischer Signalspektren der ganz wesentliche Signalanteil innerhalb der Grenzfrequenzen der Geophone und Verstärker/Filter liegen (typische Grenzfrequenzen: $f_1 = 12 \text{ Hz}$, $f_2 = 120 \text{ Hz}$). Wir setzen also:

$$|g(\omega)|^2 = 1 \quad (7.5.3)$$

Setzen wir die Übertragungsfunktion aus (4.3.10) ein, so erhalten wir im Durchlaßbereich der Aufnehmer zunächst:

$$|s(\omega)|^2 = |a|^2 \cdot |A(\omega)|^2 \cdot e^{-\omega \int_0^L \frac{ds}{c(s) c_0(s)}} \quad (7.5.4)$$

wobei nunmehr nur an positive Frequenzen^{*)} gedacht ist, so daß die Absolutstriche an der Frequenz im Exponenten fortgelassen werden können.

Es gilt nun, eine sinnvolle Annahme über $|A(\omega)|^2$ zu machen: Betrachtet man sich berechnete quadratische Signalspektren (z.B. Abb. 39 und Abb. 40), so zeigt sich, daß diese durchaus mit einer "Verteilungskurve" mit einer "Hauptfrequenz" beschrieben werden können. Während der Abfall der Amplituden bei hohen Frequenzen der Absorption zugeschrieben werden kann - wie aus (7.5.4) ersichtlich - zeigt sich ebenfalls ein Abfall der Amplituden zu niedrigen Frequenzen hin; dies heißt, daß beim Schuß nicht beliebig niedrige Frequenzen abgestrahlt werden, was auch aus der Geometrie des Schußloches verständlich wird. Mindestens in Hinblick auf die niedrigen Frequenzen ist das Schußspektrum also "nichtweiß", und man kann den spektralen Verlauf in diesem Bereich niedriger Frequenzen durch eine Funktion vom Typ ω^K beschreiben. Um dann den Abfall des Spektrums bei hohen Frequenzen beschreiben zu können, muß man sich einer Exponentialfunktion bedienen, die gegenüber jedem noch so starken Anwachsen der Potenzfunktion ω^K überwiegt. Es ist also sinnvoll, anzusetzen

^{*)} vgl. Fußnote S. 154

$$|A(\omega)|^2 = A \cdot \omega^k \cdot e^{-\frac{\omega}{b}} \quad (7.5.5)$$

Eine Funktion dieses Typs beschreibt in der Statistik die sog. Poisson-Verteilung.

Gewiß, man kann eine "glockenförmige" Spektralverteilung auch durch Lorentzkurven oder durch Gaußkurven approximieren, aber dies wäre physikalisch nicht sinnvoll. Die physikalische Auszeichnung der Poissonkurve, wie in (7.5.5), zeigt sich in folgender Eigenschaft: Wenn das Ausgangsspektrum des seismischen Impulses einer Poisson-Kurve genügt, so ist das quadratische Spektrum des seismischen Impulses nach Erleidung einer Absorption (gemäß (7.5.4)) wieder eine Poisson-Kurve; Poisson-Spektrum bleibt Poisson-Spektrum bei Absorption, lediglich der Parameter a in (7.5.5) ändert sich (Heranmultiplizieren des Exponentialterms von (7.5.4)).

Die quadratischen Spektren zweier seismischer Einsätze $S_1(t)$ und $S_2(t)$ sind also beide - unter dieser Modellannahme - Poisson-Kurven.

Sei

$$|S_1(\omega)|^2 = B_1 \cdot \omega^k \cdot e^{-\frac{\omega}{b_1}} = F_1(\omega) \quad (7.5.6)$$

so ist mit (7.1.9) und (7.1.10)

$$|S_2(\omega)|^2 = |S_1(\omega)|^2 \cdot e^{-\frac{Q_2}{b_1} \cdot \Delta t} \quad *) \quad (7.5.7)$$

$$= B_2 \cdot \omega^k \cdot e^{-\frac{\omega}{b_2}} = F_2(\omega) \quad (7.5.8)$$

wobei jetzt gilt

$$b_2 = b_1 \cdot \frac{Q_2}{Q_2 + b_1 \cdot \Delta t} \quad (7.5.9)$$

*) Diese Beziehung (7.5.7) gilt ja ganz allgemein auch ohne Annahmen über Modellspektren $|A(\omega)|^2$.

Es verändert sich also durch Absorption der Parameter b in der Poisson-Kurve (bzw. a genannt in (7.5.5)); dieser Parameter bestimmt die "Schiefe" der Kurve, d.h. ihre Unsymmetrie, und die Lage des Maximums. Denn die Poisson-Kurve hat ihr Maximum bei:

$$\omega_{\max}(1) = k \cdot b_1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\max}(2) = k \cdot b_2 \quad (7.5.10)$$

Mit (7.5.9) folgt daraus für die Verlagerung des Maximums durch Absorption:

$$\omega_{\max}(2) = \omega_{\max}(1) \cdot \frac{Q}{Q + b_2 \cdot \Delta t} \quad (7.5.11)$$

Würde man also in die quadratischen Spektren zweier seismischer Einsätze Poisson-Kurven einpassen, so könnte man allein bereits aus der Verschiebung der Lage der Maxima auf die Absorption, den Q -Faktor, schließen.

Außer der Lage des Maximums ändert sich die Halbwertsbreite der schiefsymmetrischen Poissonskurve und die Asymmetrie ("Schiefe") der Kurve, denn der Effekt der Absorption besteht darin, an der hochfrequenten Seite der Kurve Energie wegzunehmen. Die Asymmetrie einer Kurve kommt durch deren Momente zum Ausdruck, die wie folgt definiert sind ($F(\omega)$ nach (7.5.6) bzw. (7.5.8)):

$$M_j = \int_0^{\infty} \omega^j \cdot F(\omega) d\omega \quad (7.5.12)$$

Für eine Poisson-Kurve gilt speziell, daß

$$\frac{M_j}{M_{j-1}} = b \cdot (k + j) \quad (7.5.13)$$

Man kann (7.5.13) entweder allein oder zusammen mit einer numerischen Bestimmung der Lage des Maximums dazu benutzen, um die Parameter K und b eines Poisson-Spektrums zu bestimmen; für zwei Spektren des gleichen Schusses, d.h. des gleichen $|A(\omega)|^2$ hat man dazu als Nebenbedingung zu erfüllen, daß K gleich sein muß, nur b ändert sich. (7.5.13) kann man auf jeden Fall für $j > 1$ noch dazu benutzen, zu überprüfen, ob das tatsächliche seismische Impulsspektrum eine Poisson-Kurve ist.

In der Abb. 39 sehen wir die berechneten quadratischen Spektren zweier Einsätze aus einer seismischen Einzelspur aus Norddeutschland ("wavelet 1" Start: 1124 msec, "wavelet 2" Start: 3288 msec, Grundfrequenz hier 1,953 Hz). Man erkennt sowohl die Verschiebung des Maximums als auch die Veränderung von Halbwertsbreite und Schiefe der Kurve; letzteres ist noch deutlicher in der umgezeichneten Darstellung der beiden gleichen Spektren in der Abb. 40 zu erkennen.

Zum Vergleich ist in Abb. 41 eine Poisson-Kurve mit $K = 30$ und $b \cdot K = 8$ dargestellt; sie ist eine Approximation an das Spektrum von Einsatz 1 ("wavelet 1").

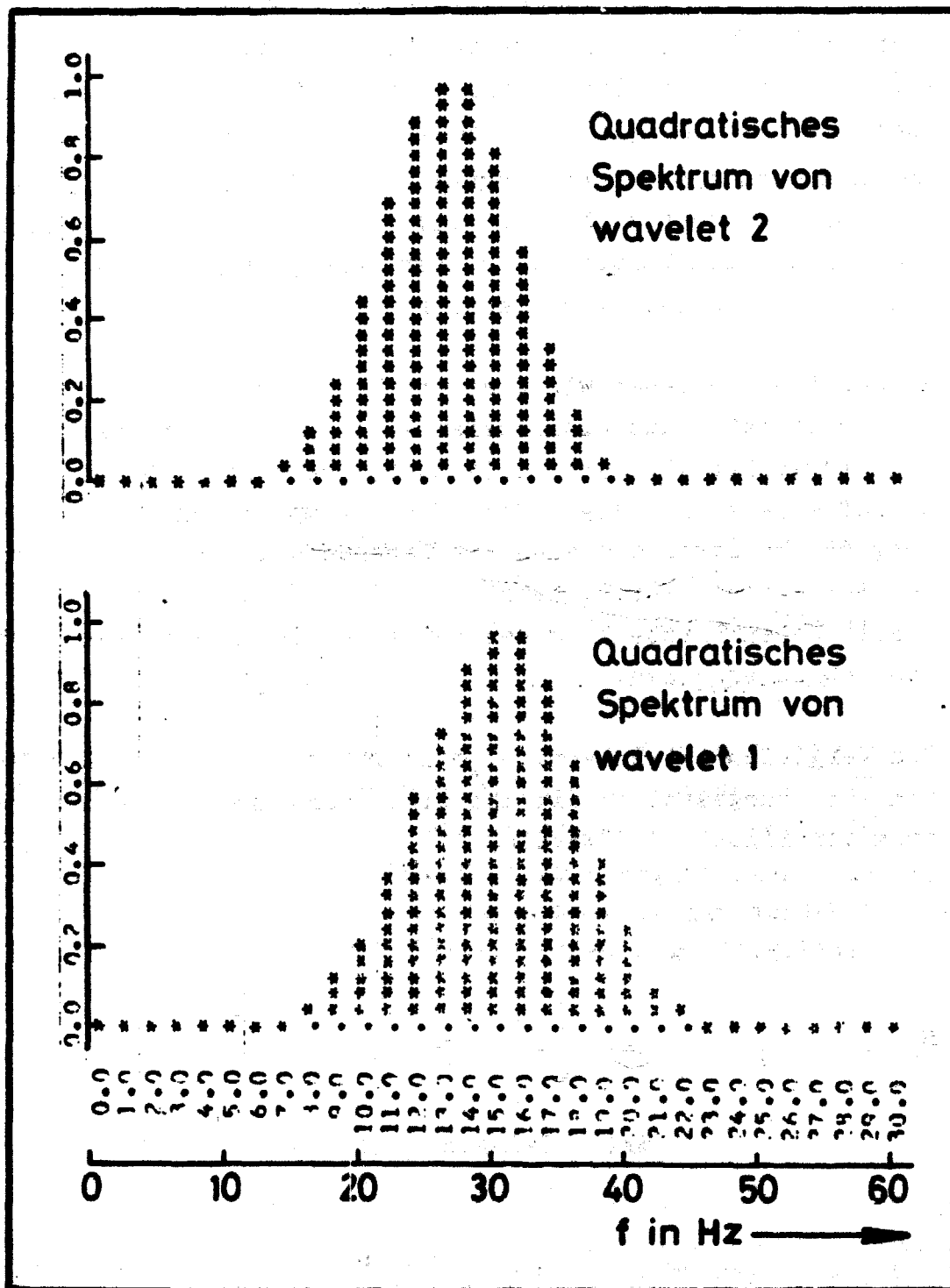


Abb. 39

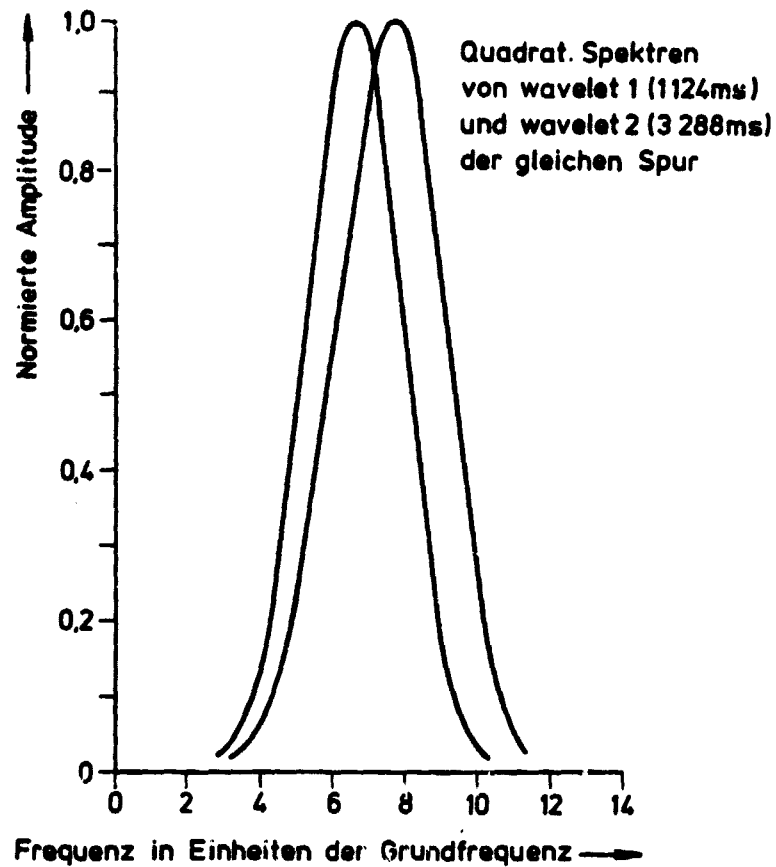


Abb. 40

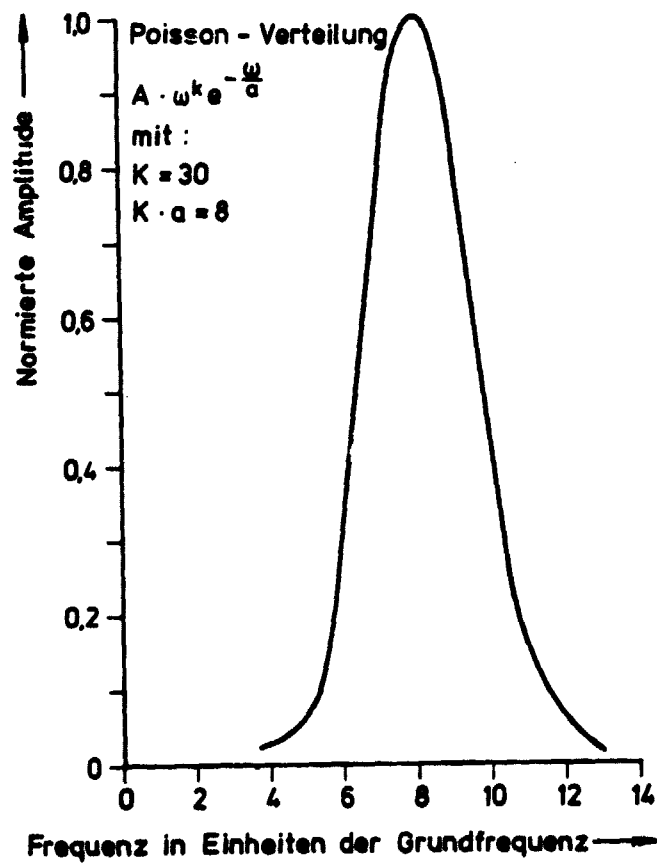


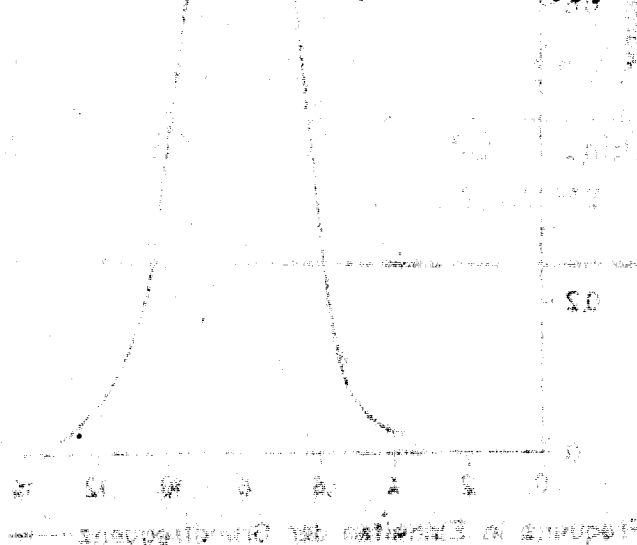
Abb. 41

Ein Vorteil dieser Methode, Q zu bestimmen, liegt darin, daß die Parameter K und b "integrale" Größen sind bei ihrer numerischen Bestimmung: Man paßt in einem gewissen mittleren Bereich, in welchem die Spektren markant über dem noise liegen, Modell-Poisson-Kurven ein; die Anpassung nach der Methode der Minimisierung der quadratischen Abweichungen erfolgt durch Berechnung von Integralen (vom Typ (7.5.12) mit endlichen Grenzen). Infolge der Integration darf man hoffen, daß nicht zu große Störungen des glatten Spektrums (durch noise und Interferenzen) ausgeglichen werden.

Leider gibt es jedoch eine Vielzahl seismischer Einsätze, bei denen die Interferenzen so erheblich sind, daß die Spektren der Einsätze weder auch nur annähernd Poisson-Kurven sind, noch, daß sie wenigstens in einem Zusammenhang wie (7.5.7) stehen. Ein typisches Beispiel ist in Abb. 42 gezeigt.

Die Methode, Absorption aus der Veränderung der spektralen Amplitudenverteilung zu bestimmen, ist also - wegen der störenden Interferenzen - direkt so nicht anwendbar.

Allerdings gilt alles oben Gesagte, sei es für eine Absorptionsbestimmung direkt oder sei es, um für die Auswertung der Kovarianzfunktionen Modellspektren zur Hand zu haben, sobald man die seismischen Signale - etwa durch homomorphes Filtern, wie in Kap. 7.6 gezeigt - von Interferenzen bereinigt hat. Die Spektren nach homomorphen Filtern erwiesen sich tatsächlich stets vom Typ der Poisson-Kurve (z.B. Abb. 53, oberer Teil).



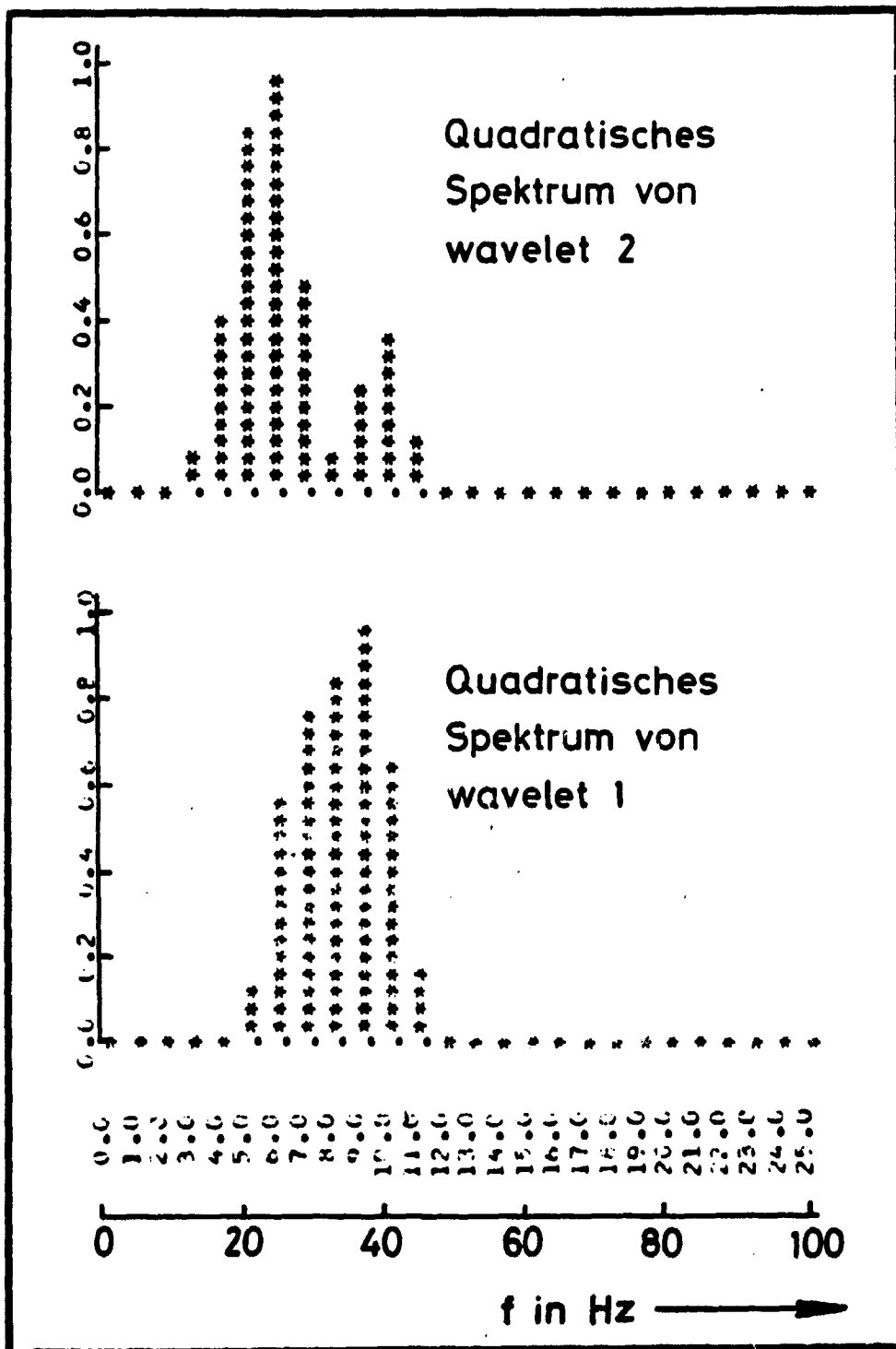


Abb. 42

7.6. Interferenzbereinigung durch homomorphes Filtern und praktische Absorptionsbestimmung

Um in der Mehrheit der in der Praxis auftretenden Fälle die Absorption, z.B. nach der Spektrendivisionsmethode, bestimmen zu können, ist zuvor eine Bereinigung der Spektren von den Verfälschungen durch Interferenzen erforderlich. Zu diesem Zwecke wurde eine vereinfachte Variante des homomorphen Filterns angewandt.

Ein gedanklicher Vorläufer zum homomorphen Filtern ist das Verfahren zur Interferenzbereinigung nach Khudzinski, welches von Behrens, J. und L. Dresen [1969] zur Trennung verschiedener, jedoch ineinanderlaufender Einsätze in Modellseismogrammen angewendet wurde. Man macht dabei Gebrauch vom "Modulationseffekt" der Interferenzen, wie er in den Formeln (7.3.7), (7.3.8) und (7.3.9) zum Ausdruck kommt; kann man z.B. aus der Lage der Maxima bzw. Minima die Modulationsperiode ω_p ermitteln, so hat man mit (7.3.9) sofort die Zeitverschiebung τ der beiden Einzelwavelets im Zeitbereich und man kann auf diese Weise den interferenzfreien Einsatz, bzw. das interferenzbereinigte Spektrum rekonstruieren. Ein Beispiel aus der Praxis der Reflexionsseismik zeigt Abb. 43. Es werden die quadratischen Spektren zweier seismischer Einsätze aus der gleichen seismischen Einzelspur gezeigt, logarithmisch aufgetragen, um die über mehrere Zehnerpotenzen sich verteilenden Spektralamplituden im graphischen Bild zu nivellieren und Interferenzstrukturen bei kleinen wie bei großen Amplituden gleichermaßen deutlich sichtbar zu machen. In dem gezeigten Falle entsteht die Interferenz offenbar an einer "Lamellen"-Struktur oberhalb des Reflexionseinsatzes 1, so daß beide Einsätze in nahezu gleicher Weise betroffen sind, denn sie zeigen beide ein gleiches Interferenzmuster. Die Interferenzperiode ω_p ist (in beiden Fällen) etwa

$$\omega_p \approx 2\pi \cdot 28 \frac{1}{\text{sec}} \quad (7.6.1)$$

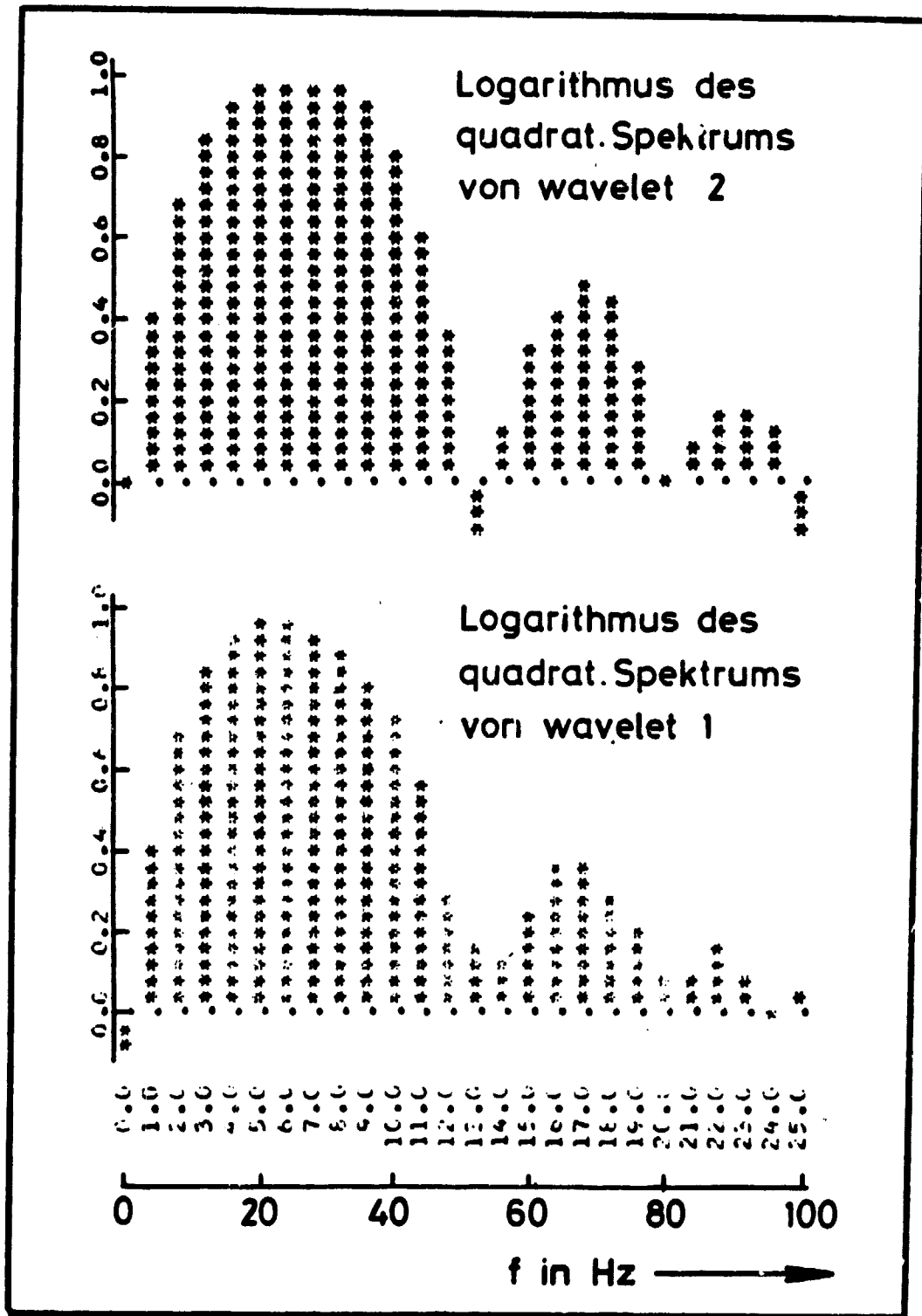


Abb. 43

womit die Zeitverschiebung zwischen den beiden interferierenden Einzelsignalen etwa wird:

$$\tau \approx \frac{1}{2\pi f} \arccos \left(\frac{A_{\min}}{A_{\max}} \right)$$

(7.6.2)

(Das bei etwa 25 Hz liegende Interferenzminimum ist nur andeutungsweise ausgeprägt, da es gleichzeitig mit dem Maximum des natürlichen Amplitudenspektrums zusammenfällt.)

Das Verfahren von Khudzinski wird praktisch dann nicht anwendbar, wenn sich das seismische Signal aus mehr als zwei einzelnen Interferenzstrahlen zusammensetzt, was jedoch leider in der Natur in der Regel der Fall ist. Denn bei mehr als zwei Interferenzstrahlen ist es praktisch immer ausgeschlossen, die beobachteten Maxima und Minima im Spektrum richtig zuzuordnen. In Weiterführung des Gedankens von Khudzinski, nämlich sich das Interferenzmuster im Spektrum anzusehen, wird man darauf geführt, eine "Frequenzanalyse" des quadratischen Spektrums vorzunehmen und dadurch die Interferenzen abzutrennen, da diese im Spektrum ja "hochfrequenter" sind als der "große Gang" des interferenzfreien Spektrums, vgl. Abb. 43. Hierauf beruht das homomorphe Filtern.

Über die Methode des homomorphen Filterns in allgemeiner Formulierung bzw. der Cepstral-Berechnungen informieren die Arbeiten z.B. von Buttkus, B. [1975], Ulrych, T.J. [1971], Bogert, B.P., Healy, M.J.R. und J.W. Tuckey [1963], Silvia, M.T. und E.A. Robinson [1978]. Während im Rahmen dieser genannten Arbeiten in der Anwendung auf seismische Fragestellungen die Wiederherstellung des interferenzfreien seismischen wavelets zum Zwecke der Dekonvolution im Vordergrund steht, machen Auras, H. und S. Grössl [1975] auf die Interferenzbereinigung durch homomorphes Filtern zum Zwecke der Absorptionsbestimmung aufmerksam.

Da wir zur Berechnung des Spektrenquotienten (7.1.11) für die Bestimmung der Absorption nur die quadratischen Spektren benötigen, können wir eine vereinfachte Version des homomorphen

Filterns zur Anwendung bringen; wir umgehen die Notwendigkeit des phase-unwrapping, da wir im quadratischen Spektrum die Phasenspektren nicht brauchen. Damit entfällt allerdings auch die Möglichkeit, das interferenzbereinigte wavelet herzustellen, wir können lediglich die interferenzbereinigten quadratischen Spektren gewinnen. Der im folgenden vorgestellte Rechengang folgt somit etwa dem bei Kanasewich, E.R. [1975], S. 115 ff. aufgezeigten Weg.

Wir gehen aus von dem einfachen Beispiel von nur zwei Interferenzstrahlen, wie in (7.3.5), um die Überlegungen überschaubar zu halten. Das Signal $s(t)$ ist eine Faltung des interferenzfreien wavelets $w_1(t)$ mit einer, die multiplen Interferenzen beschreibenden Reflexionsfunktion, die im einfachen Falle von (7.3.5) durch

$$r(t, \hat{t}) = w_1(t - \hat{t}) + w_1(t - \hat{t} - \tau) \quad (7.6.3)$$

dargestellt werden würde.

Aus dem Faltungsprozeß wird durch die Fouriertransformation eine multiplikative Operation. In (7.3.6) oder (7.3.7) ist das Spektrum des interferenzfreien wavelets multiplikativ mit dem Interferenzmuster verknüpft. Die multiplikative Verknüpfung hat - für eine wie oben überlegte "Frequenzanalyse des Spektrums" - noch den Nachteil, daß die Interferenzen dort groß hervortreten, wo auch das Spektrum selbst groß ist, und dort klein sind, wo das Spektrum selbst kleine Amplituden hat.

Durch Anwendung der Logarithmus-Operation gewinnt man aus der multiplikativen Verknüpfung eine additive (und hierdurch werden interferenzfreies Spektrum und Interferenzmuster getrennt). In unserer vereinfachten Version des homomorphen Filterns wollen wir uns auf das quadratische Spektrum vom Typ (7.3.7) beschränken; das allgemeine Verfahren wendet den Logarithmus auf das komplexe Spektrum (7.3.6) an: Da die Logarithmusfunktion einer komplexen Funktion im Imaginärteil auf $2\pi i$ unbestimmt

ist, handelt es sich bei der Logarithmusbestimmung um eine homomorphe und nicht um eine isomorphe Abbildung. (Deshalb besteht dann die Notwendigkeit des phase-unwrapping, wenn man mit dem komplexen Spektrum arbeitet.)

Wir wenden also Logarithmus auf (7.3.7) an und erhalten:

$$\log |s(\omega)|^2 = \log |w_1(\omega)|^2 + \log(1 + a^2 + 2a \cos \omega \tau) \quad (7.6.4)$$

Bei weiteren Interferenzen würden in (7.6.4) nun weitere Summanden vom Typ $\log(\dots)$ mit anderem a und τ auftreten. Zur Veranschaulichung des Ausdrucks (7.6.4) entwickeln wir den Interferenzterm gemäß

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

und erhalten für $a \ll 1$:

$$\log |s(\omega)|^2 \approx \log |w_1(\omega)|^2 + 2a \cos \omega \tau + \left\{ \begin{array}{l} \text{Terme} \\ \text{höherer} \\ \text{Ordnung} \end{array} \right\} \quad (7.6.5)$$

In der Zusammenfassung "Terme höherer Ordnung" sind Ausdrücke mit $\cos 2\omega\tau$, $\cos 3\omega\tau$ enthalten.

Wir haben in (7.6.4) bzw. (7.6.5) eine additive Aufspaltung in Spektrenanteil ohne Interferenzen, an dem wir interessiert sind, und in das Interferenzmuster allein erreicht. Wir betrachten nun $\log |S(\tau)|^2$ als Ausgangspunkt einer Frequenzanalyse, dessen Ergebnis, das Spektrum eines (logarithmierten) Spektrums "Cepstrum" genannt wird (wir denken uns etwa die Beispiele in Abb. 43, die ja logarithmische quadratische Spektren sind, als Anschauungsbeispiel). Die Frequenzanalyse von (7.6.4) bzw. (7.6.5), das Cepstrum, wird folgende Gestalt haben: Von $\log |w_1(\omega)|^2$ rührt ein, "im Frequenzbereich langweilliger", d.h.

"niederperiodischer" Anteil her, entsprechend dem mittleren, großen Verlauf in Abb. 43. Die Interferenzen dagegen sind "im Frequenzbereich kurzweilliger", d.h. "hochfrequenter", was man schon daran sieht (Abb. 43), daß mehrere Maxima und Minima auf den Gesamtverlauf von $\log |w_1(\omega)|^2$ aufgeprägt sind.

Trägt man das Ergebnis der Frequenzanalyse, das Cepstrum auf über der "Frequenz im Frequenzbereich", die man "Quefrenz" q nennt, und die ja nichts anderes ist als eine Zeit, so erhält man für (7.6.4) bzw. (7.6.5) folgende Struktur (schematisch):

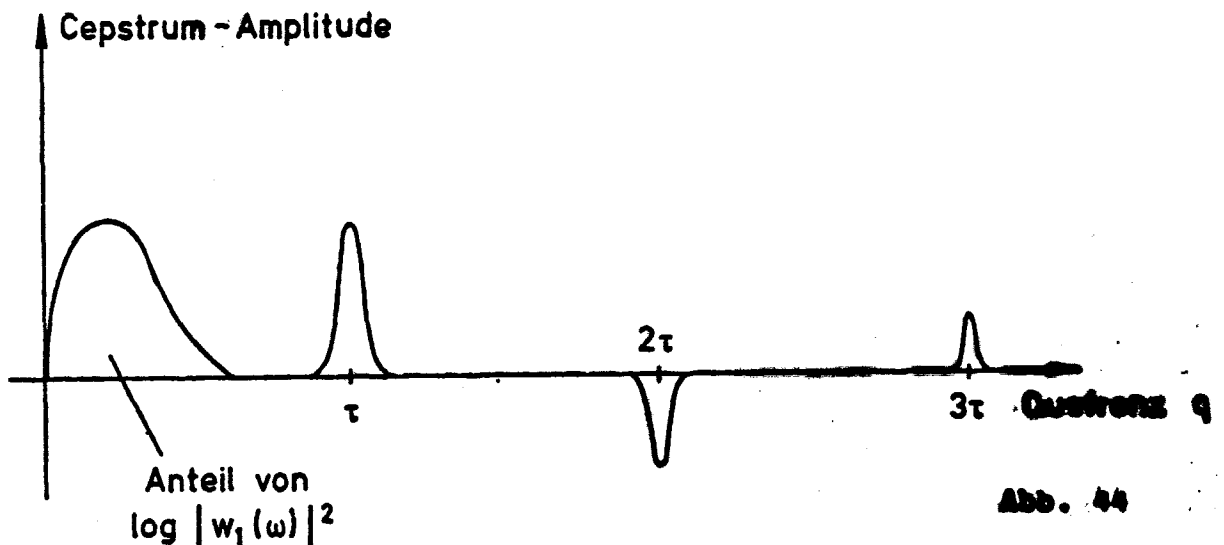


Abb. 44

Die Frequenzanalyse von (7.6.5) ergibt für das Interferenzmuster mit $\cos \omega\tau$, $\cos 2\omega\tau$, $\cos 3\omega\tau$ entsprechende δ -Funktionen an den entsprechend hochquefrenten Stellen τ , 2τ , 3τ ... τ ist - zur Erinnerung an (7.3.5) - der Verschiebungsabstand der Interferenzen^{*)}.

Das Cepstrum ist in unseren Falle komplex, da die Ausgangsfunktion (7.3.7) bzw. (7.6.4), (7.6.5) reell ist.

^{*)} Was wir in (7.3.9) die "Periode" der Modulation im (Kreis-)Frequenzbereich genannt haben, ist also in der neuen Nomenklatur

$$\frac{2\pi}{\text{Quefrenz}} = \frac{2\pi}{q}$$

Durch die Cepstrum-Bildung, also der Frequenzanalyse der durch Logarithmusoperation additiven Zusammensetzung von wavelet-spektrum und Interferenzen, ist es gelungen, den gesuchten Anteil des interferenzfreien Spektrums auf der Queffrenz-Skala in einen anderen, niederqueffrenten Bereich abzubilden als das Interferenzmuster.

Schneidet man nun im Cepstrum einfach die von den verschiedenen Interferenzen herrührenden hochqueffrenten Peaks weg, setzt sie zu Null ("homomorphes Filtern") und behält nur den niederqueffrenten, zu $\log |w_1(\omega)|^2$ gehörenden Anteil übrig, so würde eine zur Cepstrum-Bildung inverse Fouriertransformation das von Interferenzen befreite, logarithmische Spektrum ergeben: Nach homomorphen Filtern und inverser Cepstrum-Fourier-Transformation also:

$$\log |s(\omega)|^2 = \log |w_1(\omega)|^2 \quad (7.6.6)$$

Entweder geht man hiermit direkt in den Spektrenquotienten (7.1.11) ein, oder man wendet noch die Exponentialoperation zuvor an, als Inverse zum Logarithmus.

Mitten wir statt der hier vereinfachten Version den Logarithmus des komplexen Spektrums (7.3.6) verwendet und hiervon durch Fouriertransformation das allgemeinere Cepstrum berechnet, so hätten wir statt des quadratischen Spektrums in (7.6.6) das komplexe Spektrum und könnten nach Anwendung der Exponentialoperation das interferenzfreie wavelet wiederherstellen.

Die Fouriertransformation zur Cepstrum-Bildung, also zur Frequenzanalyse des log-Spektrums, führt man sinnvoll umgekehrt zur Definition nach (4.1.5) und (4.1.6) aus, vgl. Schema in.

Abb. 45; grundsätzlich ist es ja Definitionssache, wie man für eine Frequenzanalyse, die Fouriertransformation, definiert (Fußnote S. 72) bei einer Cepstrum-Berechnung wie hier angegeben, hat man aber den Vorteil, daß das Cepstrum im allgemeinen

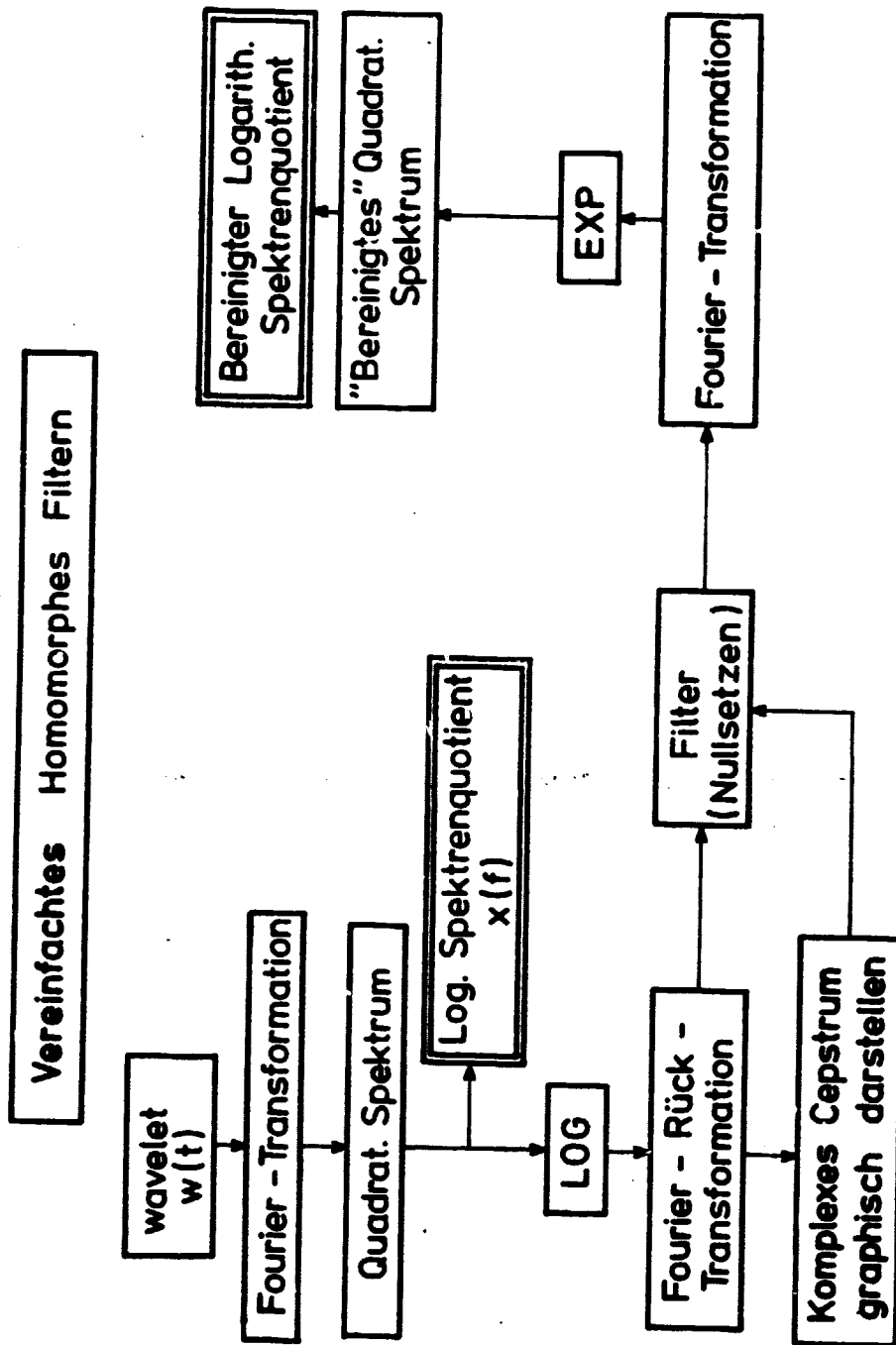


Abb. 45

Falle, d.h. Verwendung des komplexen (statt nur des quadratischen) Spektrums genau das Ausgangswavelet wäre, wenn die Logarithmus-Operation entfielen; mit anderen Worten, die Queffrenz ist übereinstimmend mit der Zeitachse.

Die Abb. 45 zeigt den schematischen Gang der Rechnung zum Gewinnen des bereinigten quadratischen Spektrums; das Filtern des Cepstrums wurde zunächst einfach durch "Nullsetzen" von einer bestimmten, vom Bearbeiter gewählten Abschneidequeffrenz an vorgenommen. Später wurde das Filtern durch eine Flanke (Abb. 46)

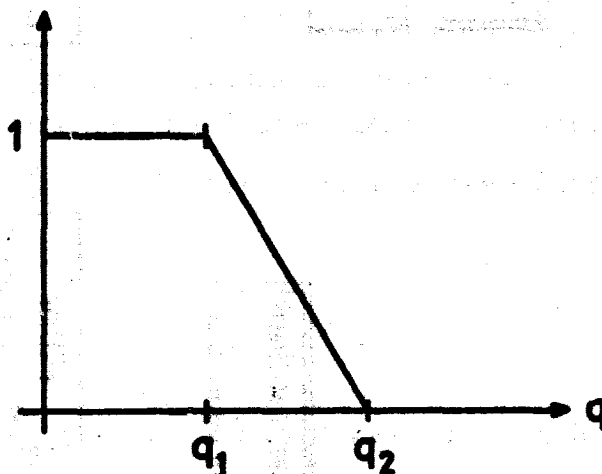


Abb. 46

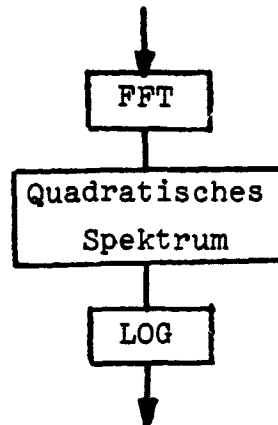
ersetzt, deren "Eckqueffrenzen" q_1 und q_2 im interaktiven Rechenablauf eingegeben werden können.

Zur Berechnung eines Spektrenquotienten ist das gleichzeitige homomorphe Filtern von zwei Einsätzen notwendig; diese wurden jedoch nicht individuell homomorph gefiltert, sondern gleichbehandelt.

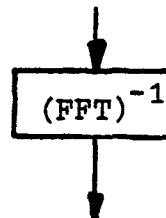
Der numerische Rechengang ist im folgenden Schema skizziert:

Zeitbereich :

Standard 140 msec (35 samples zu 4 msec sampling-rate)

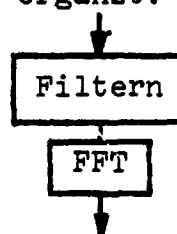
Mit Nullen aufgefüllt bis 256 msec
(64 samples)Spektralbereich :

33 Spektralwerte ($32 + 1$; $32 = \frac{64}{2} = \frac{N}{2}$)
 (Grundfrequenz $\frac{1}{0,256} = 3,90625$ Hz).
 bis auf 64 Werte mit Nullen ergänzt

Cepstralbereich :

64 Werte, komplex
 Realteil symmetrisch zu $q = 0$,
 Imaginärteil antisymmetrisch zu $q = 0$.
 Grundeinheit der Quefrenz: 4 msec
 (wie samplingrate im Zeitbereich).

Nyquist-Quefrenz $q_N = 128$ msec.
 Keine Nullen ergänzt.

Spektralbereich :

Bereinigtes quadratisches Spektrum

In den folgenden Beispielen ist in der Darstellung der Cepstra der Bereich negativer Queffrenzen (von $-q_N$ 0) auf den Aliasbereich von $+q_N$ $+2q_N$ abgebildet ($q_N = \text{Nyquistqueffrenz} = 32 \text{ Werte} \cdot 4 \text{ msec} = 128 \text{ msec}$).

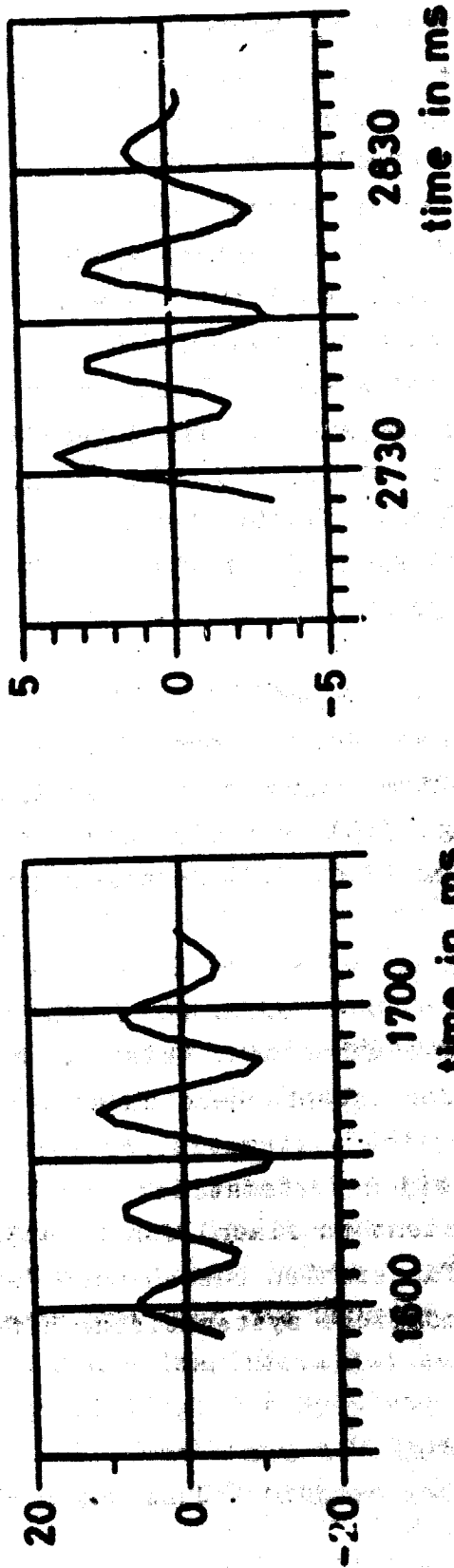
Die Beispiele stammen von einem Profil in Norddeutschland, welches durch Herauszeichnen der markanten Horizonte in Abb. 59 zu sehen ist. Dieses Profil soll als typischer Fall für die Sedimentformationen in Norddeutschland und den Einfluß eines Salzstocks gelten. An den bezeichneten Schußpunkten wurden aus den jeweils 24 Einzelspuren eine Einzelspur ausgesucht, bei der alle interessierenden Reflexionen als markante Einsätze zu erkennen sind. Es wurde dann jeder Einsatz mit jedem kombiniert und - nach homomorphem Filtern - das zugehörige Q bestimmt. So war es möglich, nachträglich mit (2.1.64) einen Konsistenztest der errechneten Werte auszuführen.

Ein typisches Beispiel für den Ablauf des interaktiven Rechengangs zur Q-Bestimmung, so wie es derzeit am Leibniz-Rechenzentrum der Preussag-AG eingerichtet ist, soll in den Abbildungen 47 bis 53 vorgestellt werden. Es ist von Schußpunkt 67 mit wavelet-Starts bei 1590 ms und 2720 ms. Die wavelets zeigt Abb. 47. In der folgenden Abb. 48 sind in den oberen beiden Teilen die logarithmischen quadratischen Spektren $\log |S(\omega)|^2$ aufgetragen; man sieht deutlich die aufgeprägten Interferenzmuster. Der logarithmische Spektrenquotient $X(f)$ nach (7.1.11) ist in den unteren Diagrammen dieser Abbildung dargestellt; das rechte davon ist lediglich ein Teilausschnitt des gesamten Verlaufes (links), Grundfrequenz in Einheiten 3,90625 Hz. Der Spektrenquotient zeigt also einen durch Interferenzen sehr gestörten Verlauf (das ist die übliche Erscheinung), man kann schwer eine vertrauenswürdige Gerade negativer Steigung einpassen. In Abb. 49 sehen wir dann die Cepstra beider wavelets, oben die Real- und unten die Imaginärteile; bei $q = 32$ Einheiten (eine Einheit 4 msec) liegt die Nyquistqueffrenz. Wir sehen deutlich abseits von der Umgebung $q = 0$ Cepstralamplituden, was auf die Interferenzen zurückzuführen ist.

In Abb. 50 sehen wir nun die noch "sehr vorsichtig" gefilterte Cepstren: Es wurde alles außerhalb von $q = -8 \dots +8$ Einheiten zu Null gesetzt, bzw. in der hier vorliegenden Darstellung negativer Queefrenzen im oberen Aliasbereich dementsprechend alles von $q = +8 \dots +56$. Die folgende Abb. 51 zeigt oben die beiden quadratischen Spektren nach dem Filtern, entlogarithmiert, darunter den nun erhaltenen Spektrenquotienten, in der rechten Darstellung wieder ein Ausschnitt der Gesamtdarstellung links. Offenbar ist noch ein Interferenzphänomen enthalten, deshalb filtert man im nächsten Schritt etwas enger. In Abb. 52 ist das Ergebnis eines Filterns von $q = 6 \dots 58$ gezeigt, bei dem die verbliebene Interferenzstörung dadurch weiter verringert wurde. Schließlich zeigt Abb. 53 das Ergebnis für eine homomorphe Filterung von $q = 4 \dots 60$ Einheiten. Nunmehr haben wir einen "bereinigten" Spektrenquotienten gewonnen, aus dessen Verlauf Q bestimmt werden kann. Im praktischen Rechenverlauf schließt sich ein Folgeprogramm für lineare Einpassung und Bestimmung des Q -Faktors an.

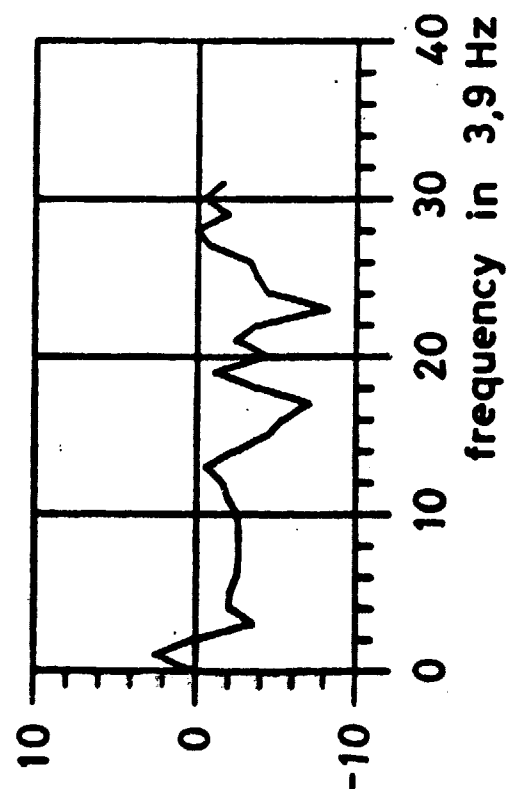
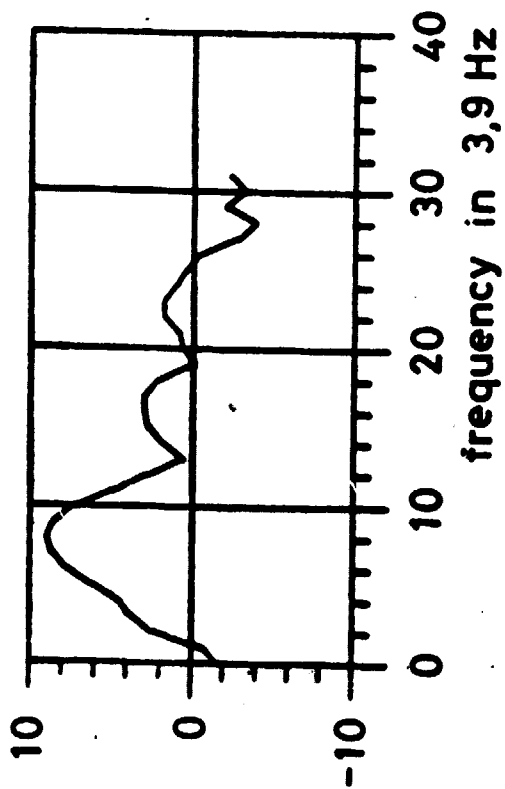
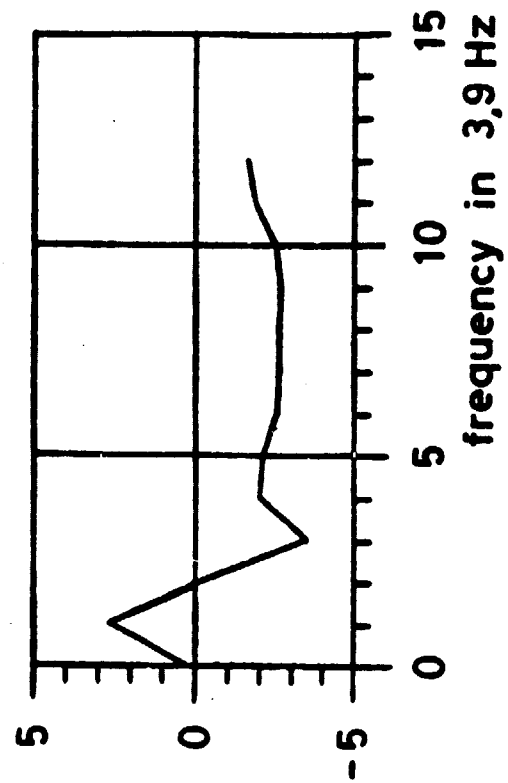
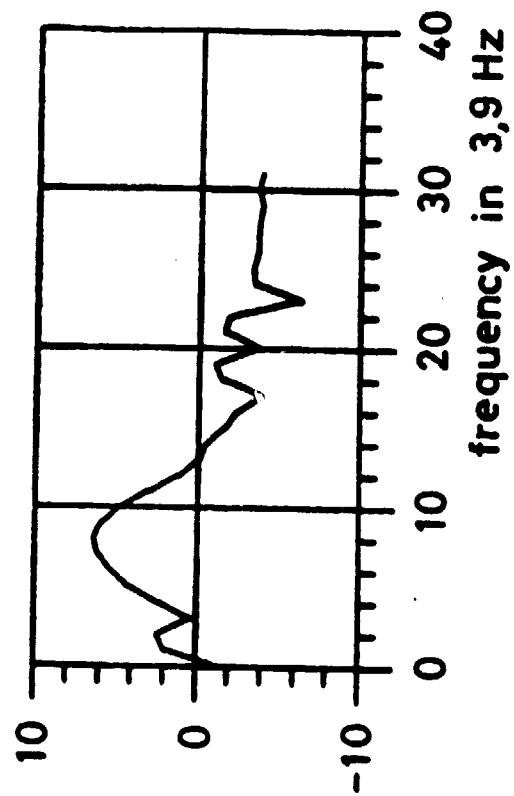
Es sei angemerkt, daß die in dieser Abb. 53 oben dargestellten "bereinigten" quadratischen Spektren nunmehr zu einer Analyse durch Poisson-Approximation (Kap. 7.5) oder als Modellspektrum für Kovarianzfunktions-Auswertung (Kap. 7.4) herangezogen werden können.

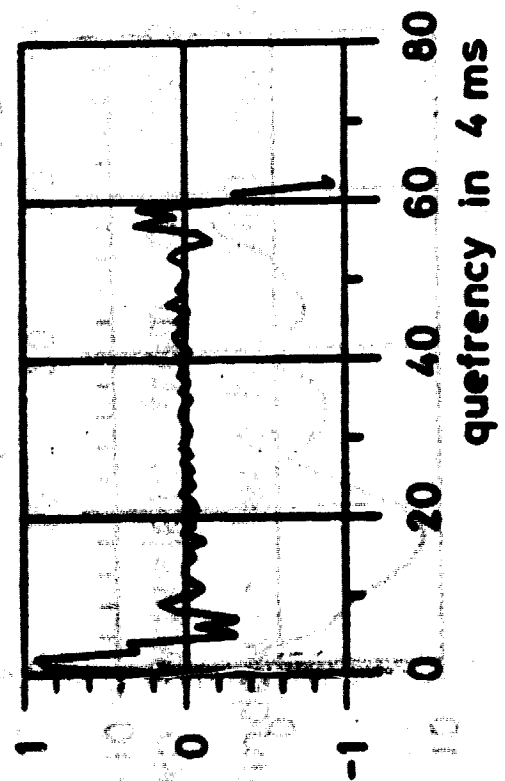
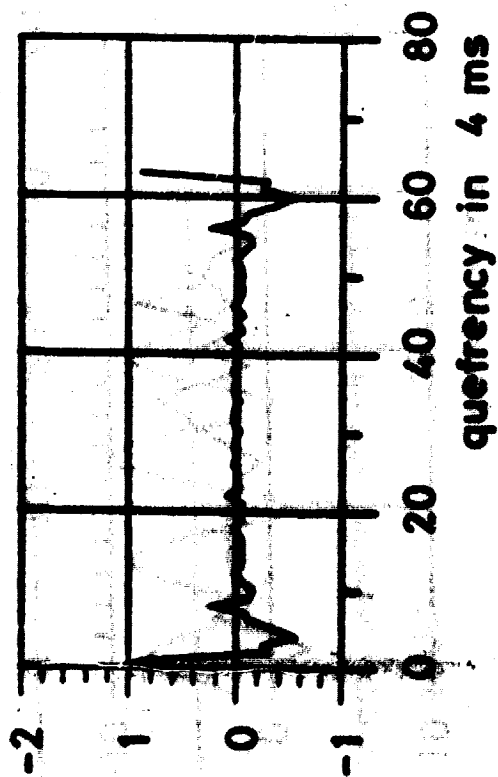
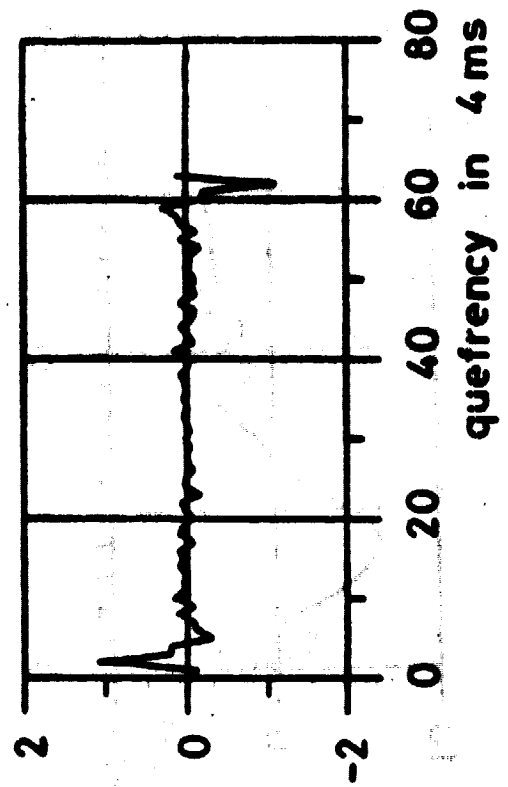
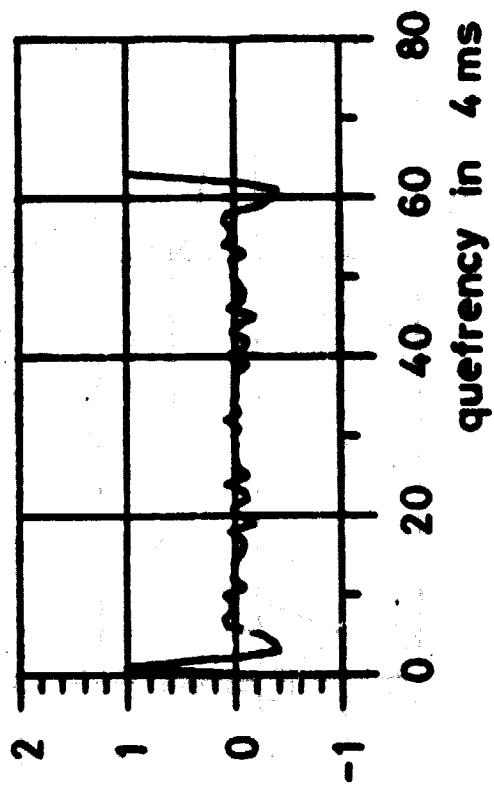
Oftmals reicht eine Filterung von $q = 4 \dots 60$ Einheiten noch nicht aus und man muß noch enger abschneiden. Meistens wurde mit $q = 3 \dots 61$ abgeschnitten, oder entsprechend zu Abb. 46 mit $q_1 = 3, q_2 = 5$ gefiltert. Eine Reihe systematischer Versuche zeigte, daß noch engeres Abschneiden systematisch zu zu großen Q -Werten (Spektrenquotient zu flach) führt. Außerdem wurde mit Hilfe von zwei aus Zufallszahlen bestehenden "wavelets" der gesamte Programmablauf auf mögliche systematische Effekte untersucht.

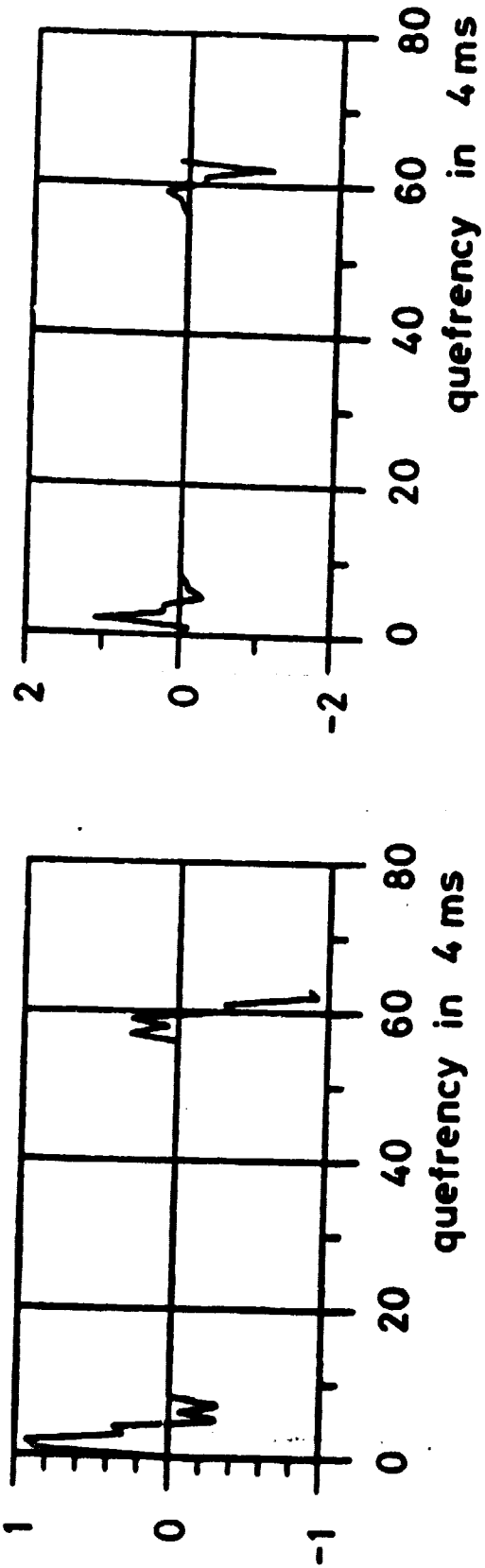
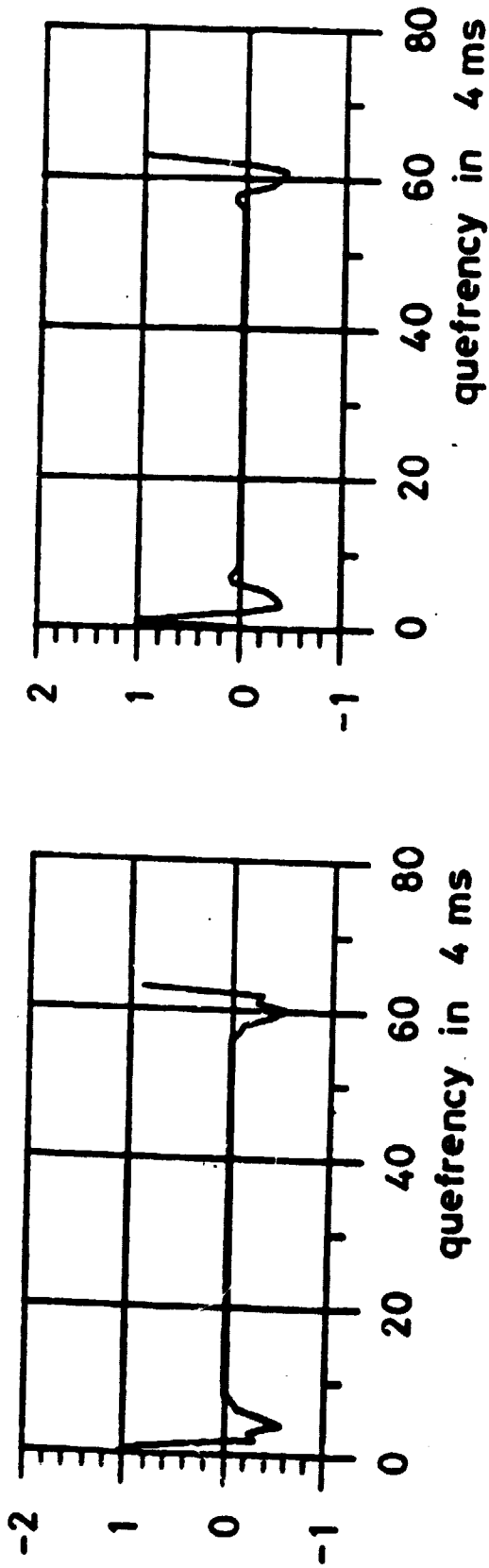


Two wavelets from a single trace.

Window - length: 140 ms each







cutoff quefrency 8 ... 56 units

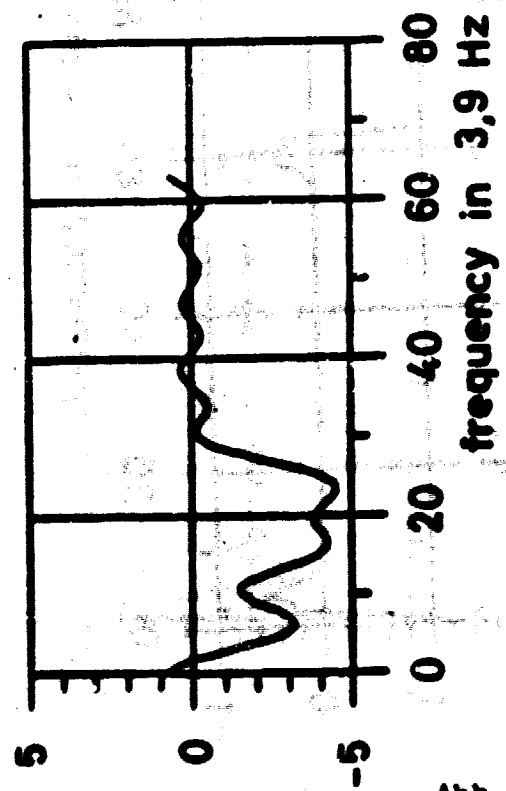
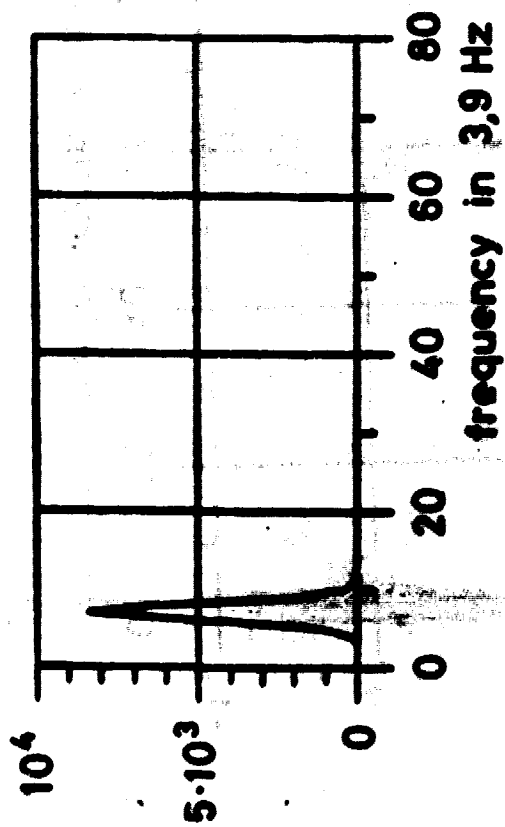
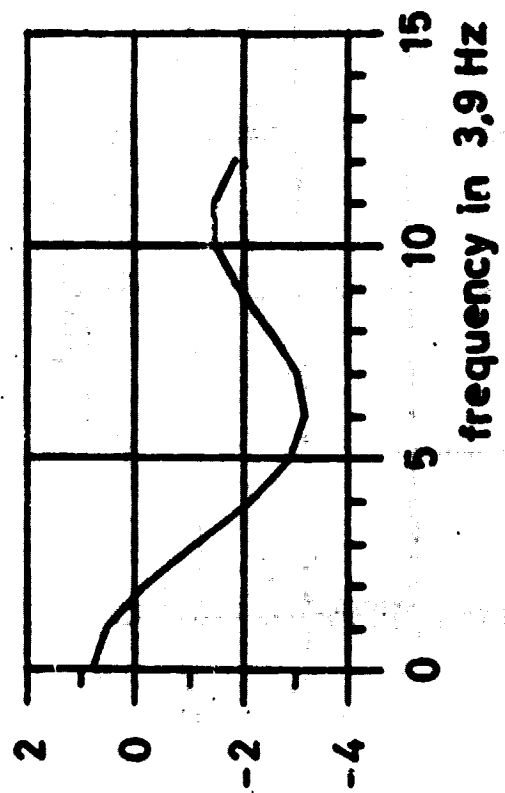
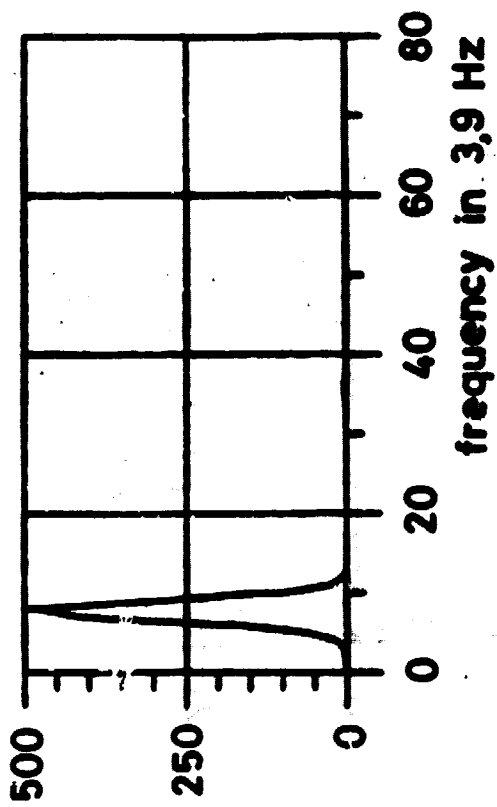


Abb. 51

Result with cutoff quefreny 8... 56 units

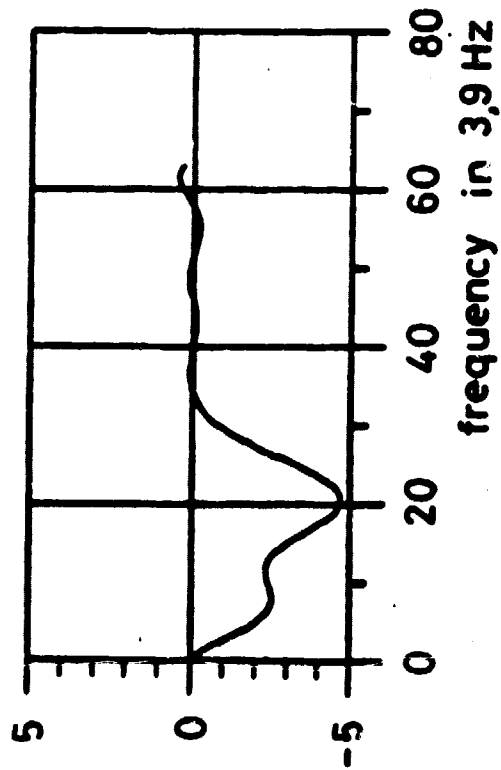
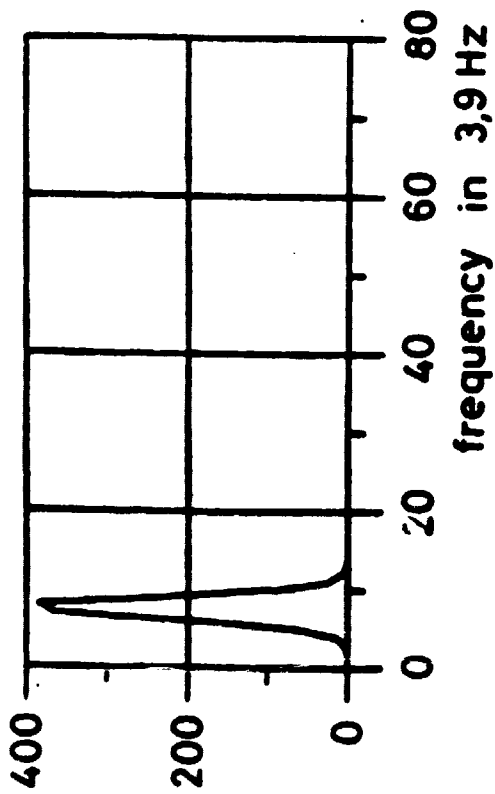
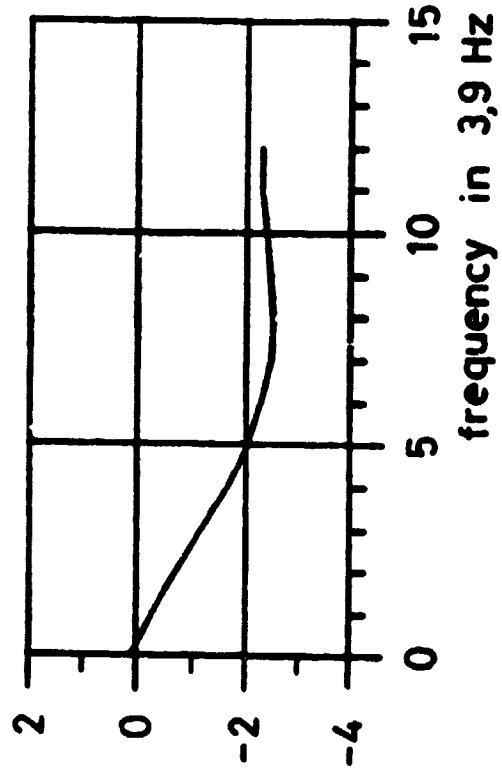
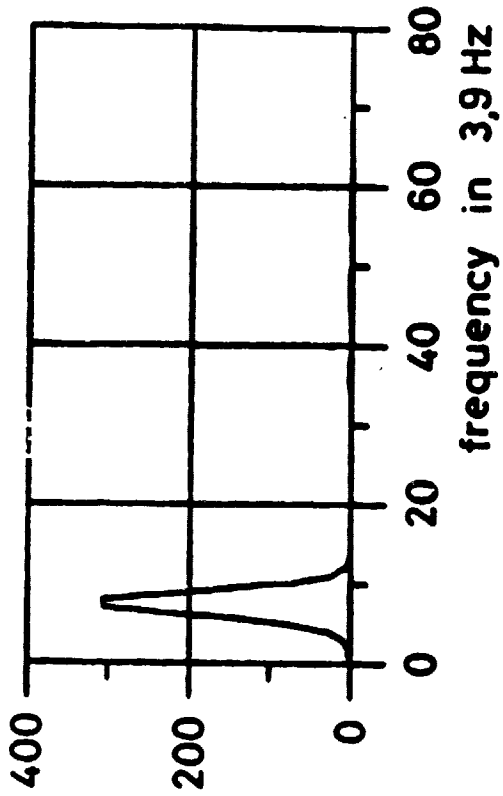


Abb. 52

Result with cutoff quefreny 6 ... 58 units

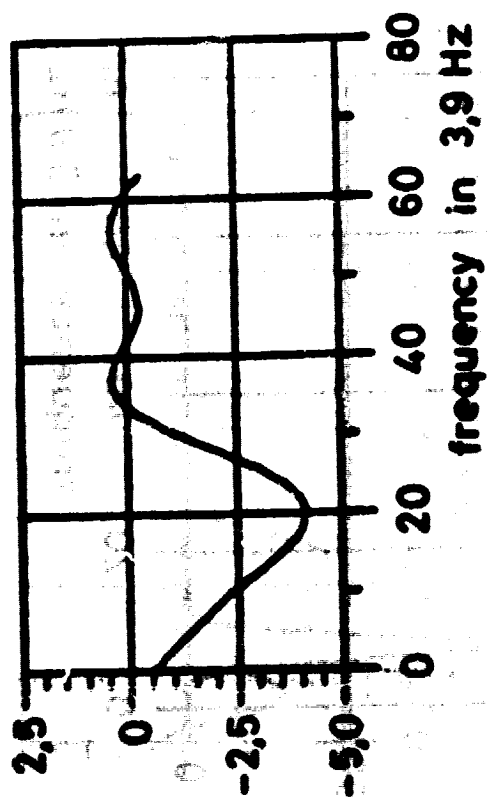
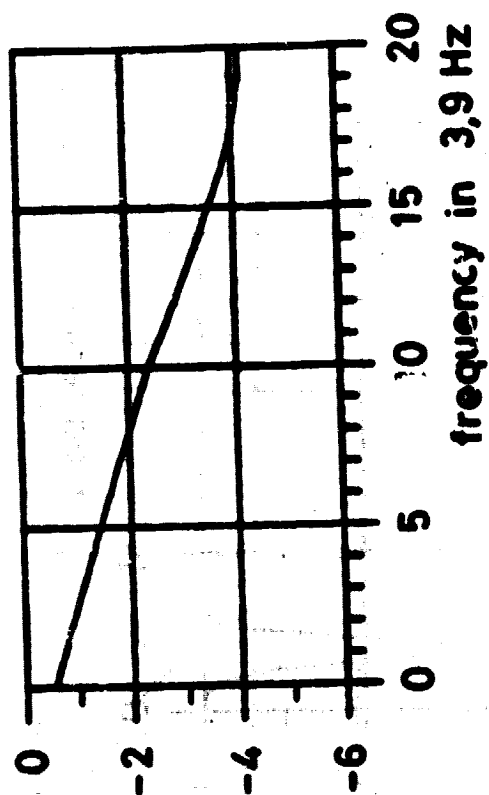
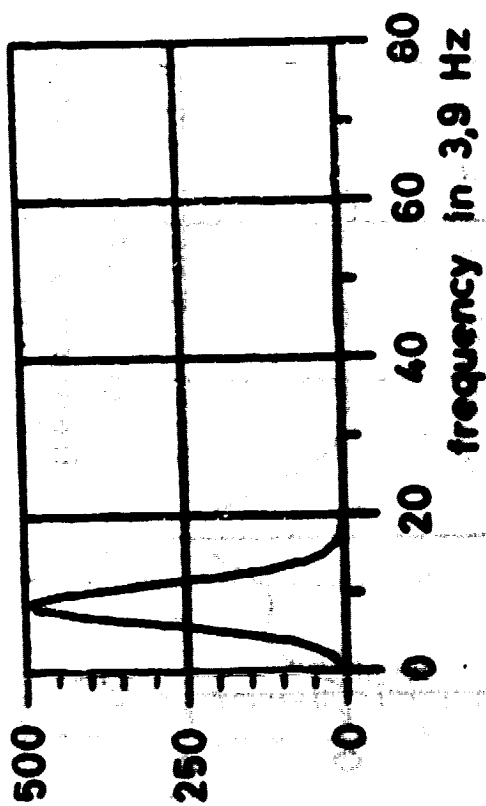
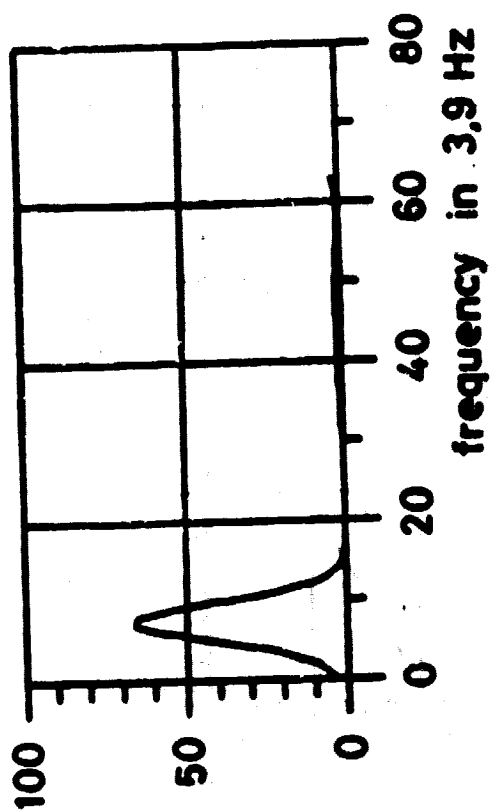


Abb. 53

Result with cutoff queffency 4... 60 units

Ein anderes, ebenso typisches Beispiel für die Interferenzbe-
reinigung ist vom gleichen Profil (Abb. 59), vom Schußpunkt 108
ausgewählt (waveletstart 1: 937 msec, waveletstart 2: 2655 msec).
Abb. 54 zeigt den Spektrenquotienten ohne homomorphes Filtern
(Frequenzachse Einheit 3,90625 Hz), während der bereinigte

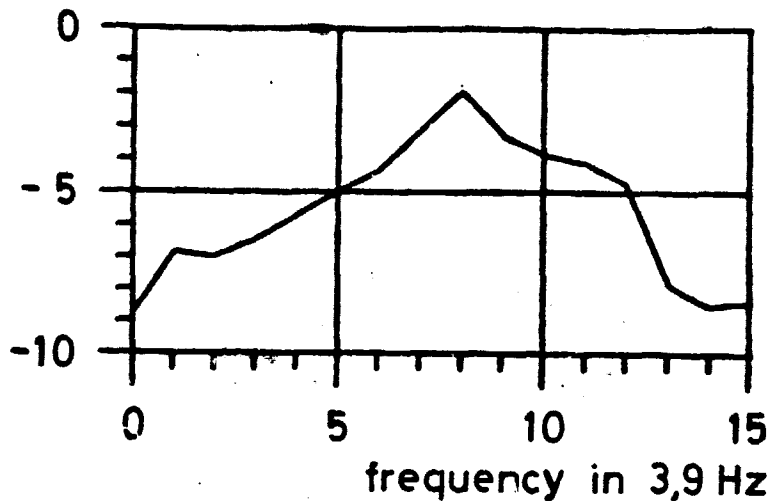


Abb. 54

Spektrenquotient nach homomorphen Filtern beider wavelets
mit $q = 3 \dots 61$ in Abb. 55 dargestellt ist.

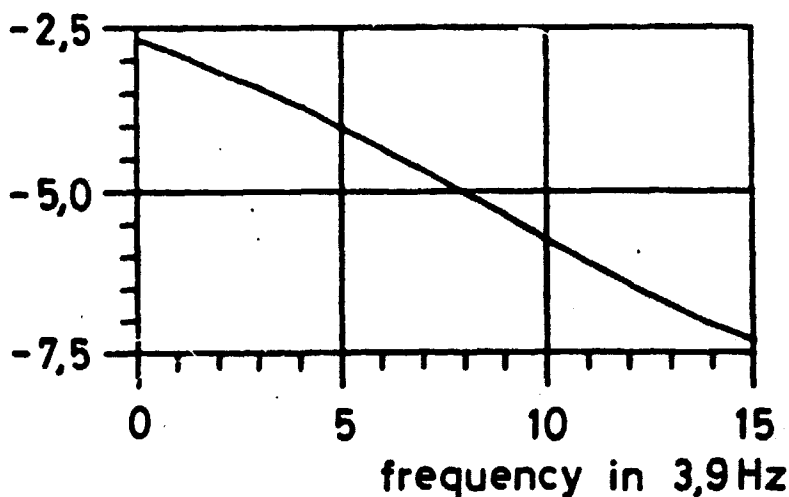


Abb. 55

Interessant erwies sich der Lechsteinsreflex (Abb. 56) innerhalb des Salzstockes auf diesem Profil (Schußpunkt 194, Start 2380 msec). Sein Cepstrum erwies sich (übrigens ebenfalls am SP 216) insbesondere im Imaginärteil besonders interferenzbehaftet. Abb. 57 zeigt oben den Real- und den Imaginärteil des Cepstrums.

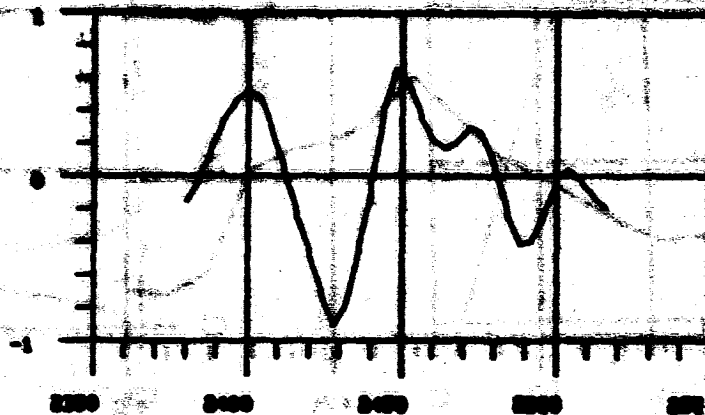


Abb. 56

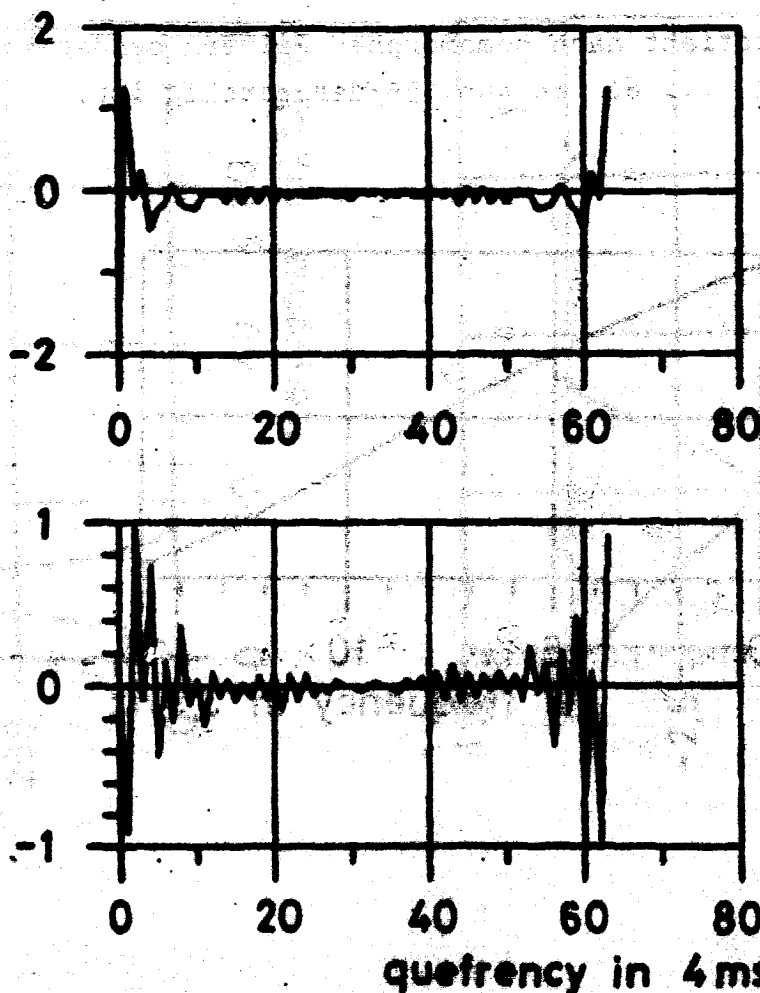


Abb. 57

Den gezeigten Beispielen sei gegenübergestellt das Cepstrum von nahezu interferenzfreien wavelets; ein Beispiel dafür zeigt Abb. 58

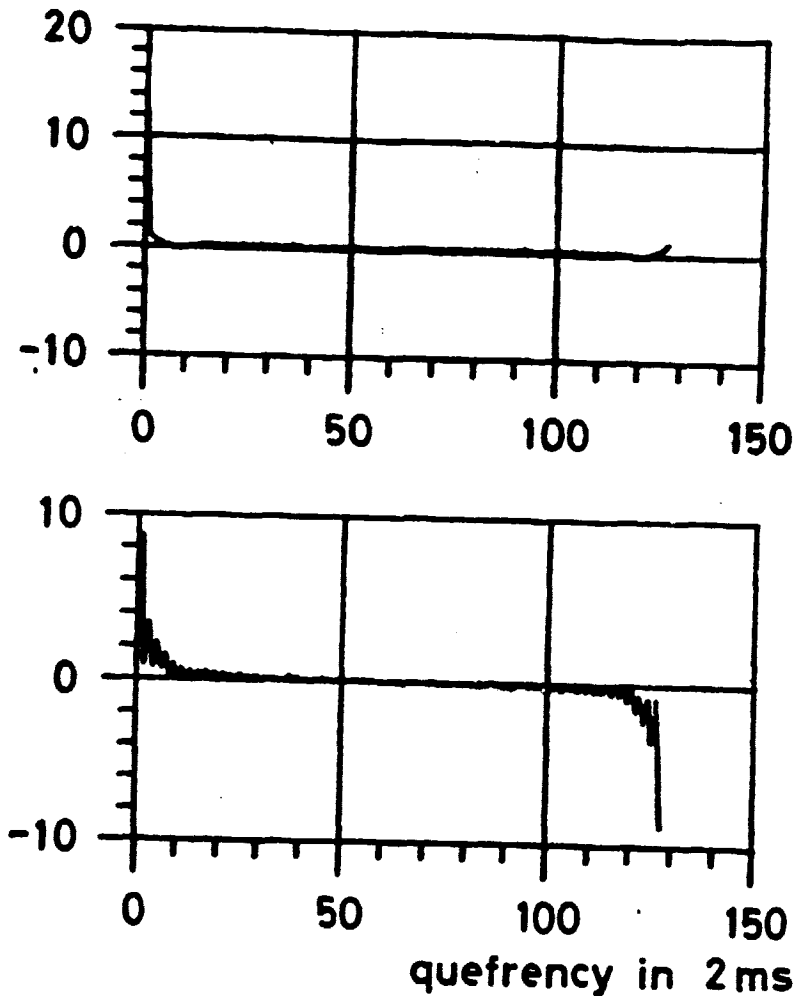


Abb. 58

Es lag mit 2 msec samplingrate vor, deshalb ist die Quefrenz-Einheit hier 2 msec und die Nyquistquefrenz $q_N = 64$ Einheiten.

Von Interferenzen ist im Realteil praktisch überhaupt nichts zu sehen, im Imaginärteil deutet sich ein Muster an. Es handelt sich hier um eines der beiden wavelets, aus denen die Berechnung eines Spektrenquotienten ohne vorheriges homomorphes Filtern gelang, Abb. 19.

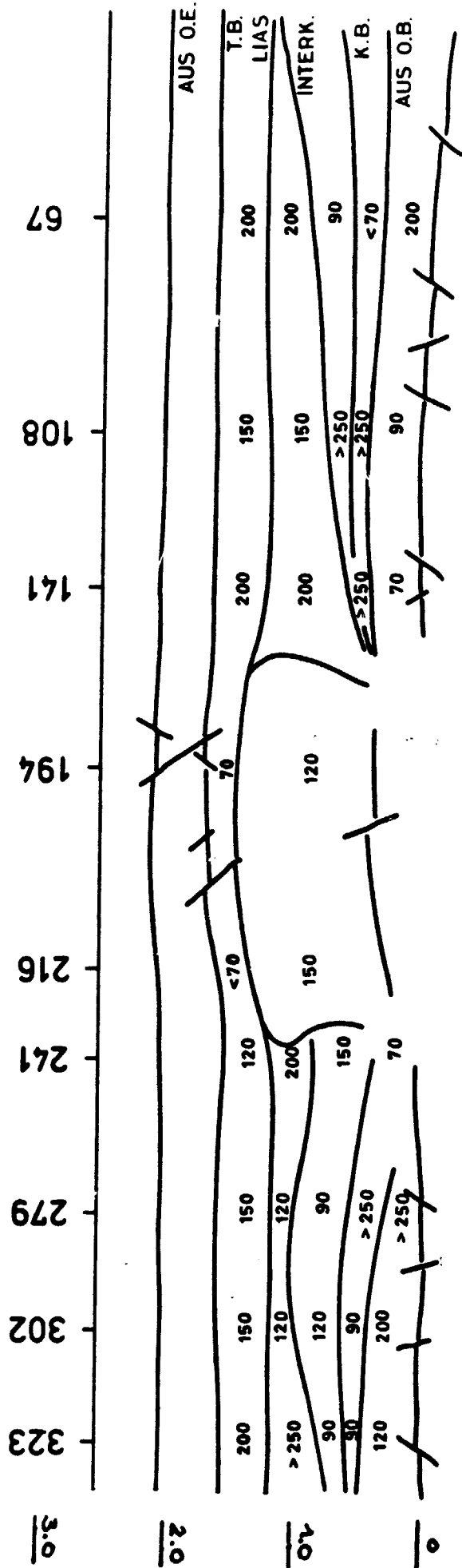
Die errechneten Q-Werte für das bearbeitete Profil (Abb. 59) streuen durchaus noch, einmal, weil nicht immer die Interferenzen offenbar vollständig ausgefiltert werden können, zum anderen ergeben sich noch gewisse Streuungen durch die Konsistenztests (2.1.64)^{*)}. In dem Profil Abb. 59 sind für Q mittlere Werte eingetragen, wobei die Fehler etwa $\leq \pm 20\%$ liegen dürften.

Besonders auffallend ist das markante Ansteigen der Absorption (Q wird kleiner) der Lias-Formation im Bereich über dem Salzstock. Dabei läßt sich natürlich nicht sagen, ob dies ein Effekt vorzugsweise einer erhöhten Streuung durch stärkere Zerklüftung ist oder ob es eine echte Absorption etwa durch veränderte Kompaktion oberhalb des Salzstockes ist. Der obere Buntsandstein unmittelbar über dem Zechsteinbasishorizont zeigt eine deutliche Absorptionszunahme zum Salzstock hin. Schließlich mag überraschen, daß das Salz im Salzstock selbst mit seiner Absorption keineswegs in irgendeiner Weise extrem einzuordnen ist, sondern mittlere Q-Werte aufweist.

Als repräsentativ für die Verhältnisse in der tieferen Erdkruste soll das zweite Beispiel angesehen werden: Im norddeutschen Raum wurde von einer größeren Firmengruppe ein Programm zum seismischen Tiefenaufschluß vorgenommen. Eine Herauszeichnung der Einsätze bzw. Einsatzgruppen zeigt die Abb. 60. Als oberster Horizont ist die Zechsteinbasis eingetragen. Darunter sieht man zwischen 6000 und 8000 msec die Einsätze der Conrad-Diskontinuität, während bei etwa 10 000 msec die Moho erscheint. Das Bemerkenswerte an diesem Profil ist nun, daß sich die deutlich erkennbare Aufwölbung der Conrad-Diskontinuität im Verlauf der Zechsteinbasis wiederfindet, mehr noch, daß diese Aufwölbung sich bis in die (über dem Zechstein liegenden) allerjüngsten

^{*)} Die Streuung der Ergebnisse läßt sich vielleicht verringern durch Berechnung der Amplitudenspektren anstatt über eine FFT über die Cosinus-Transformierte der Autokovarianzfunktion (vgl. S. 189 und S. 190 [Grässl, S. und P. Finger, 1975]). Vielleicht ergäbe sich dabei auch die Möglichkeit zu weniger engem Abschneiden im Quefrenz-Bereich.

O.E.	=	Oberer Eozän
T.B.	=	Tertiär-Basis
Interk.	=	Interkeuper-Reflex
K.B.	=	Keuper-Basis
O.B.	=	Oberer Buntsandstein



Formationen durchpaust. Da alle diese Formationen sich einmal horizontal absedimentiert haben, muß folglich die Conrad-Aufwölbung sehr jung, vielleicht rezent, sein.

Die Bestimmung des Q-Faktors für die unter dem Zechstein liegenden Reflexionen war erheblich schwieriger als jene im Profil Abb. 59. Dies liegt einmal daran, daß die Tiefenreflexionen in den Einzelspuren meist überhaupt nicht zu sehen sind, sondern nur im gestapelten Profil (aus 48 Einzelspuren) hervortreten. Es wurde deshalb in diesen Fällen aus der Einzelspur ein Signalabschnitt herausgeschnitten, der um die Einsatzzeit des in der gestapelten Spur erkannten Reflexes liegt in der Annahme, daß der Frequenzgehalt des in diesem Zeitabschnitt auftretenden Signals (vermutlich aus entsprechender Tiefe gestreutes Signal, "signal generated seismic noise" [Hudson, J.A. und L. Knopoff, 1966]) nicht wesentlich verschieden ist von dem eines erkennbaren Einsatzes aus dieser Tiefe. Daß diese Annahme gerechtfertigt ist, bestätigt sich dadurch, daß die Ergebnisse mit Nachbarpunkten konsistent sind. Eine weitere Schwierigkeit der Q-Bestimmung für Tiefenreflexionen lag in der Beobachtung, daß die Spektren nur bis etwa 25 Hz durchweg auswertbare Spektrenquotienten ergeben, höhere Frequenzen sind offenbar durch noise beeinflusst; natürlich ist der Grund zu dieser Erscheinung in der Absorption zu sehen, die ja auf dem langen Laufweg der Tiefenreflexionen im Sinne von (7.5.4) die hohen Frequenzen eben bereits weggedämpft hat.

Das Ergebnis der Q-Bestimmung ist im Profil selbst eingetragen. Die angegebenen Werte stellen mittlere Q-Werte dar, wobei im Falle der Tiefenreflexionen generell auch neben der üblichen Fensterlänge von 140 msec längere Fenster (bis zu 400 msec) verwendet wurden; die so gewonnenen Ergebnisse streuen zwar, jedoch nicht so stark, daß man gar widersprüchliche Werte erhielte. Die Streuung dürfte typisch um $\leq 20\%$ 25% liegen.

Bemerkenswert ist, daß sich eine deutliche Zunahme der Absorption zwischen Zechsteinbasis und Conrad-Diskontinuität im

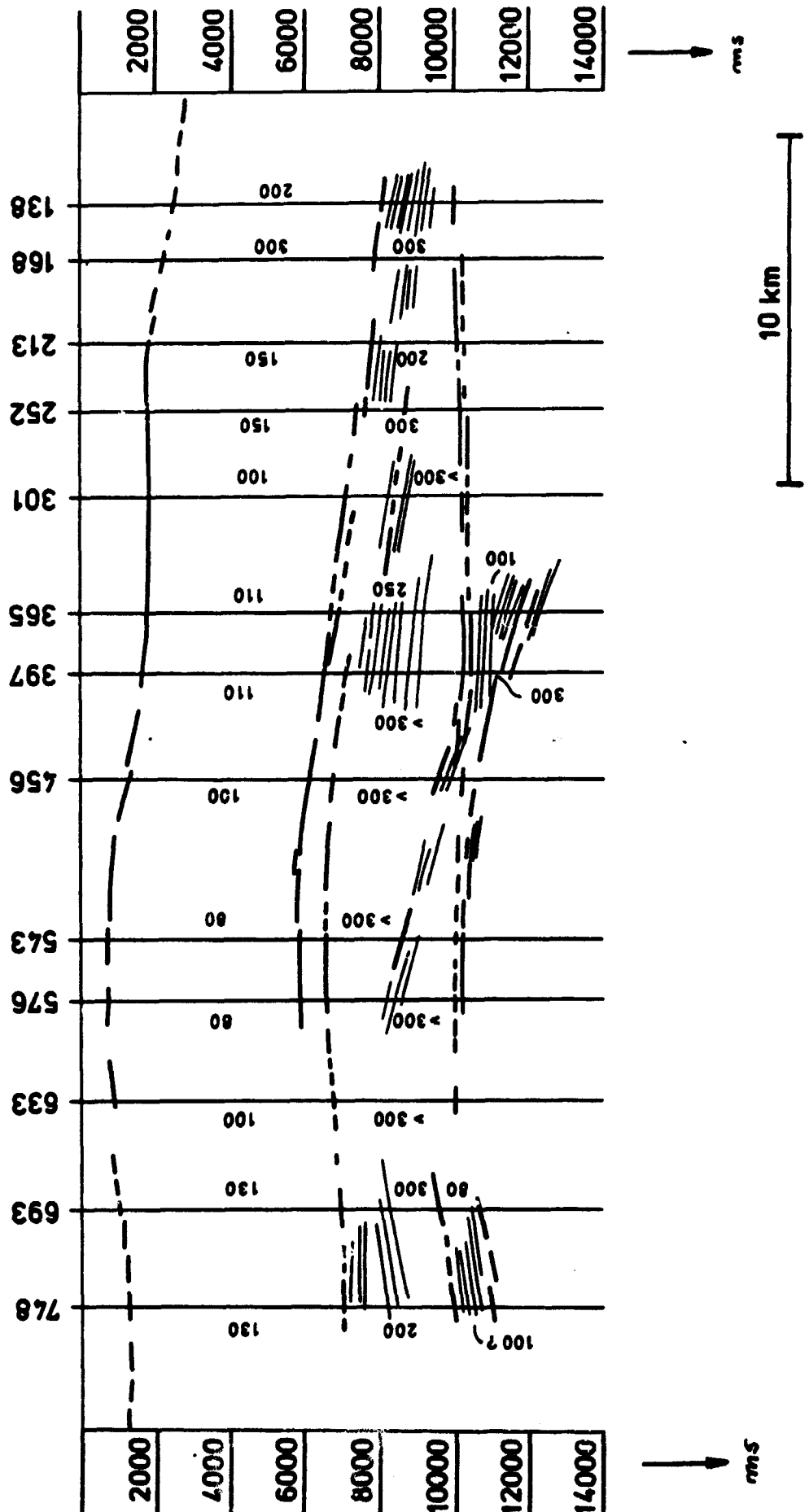


Abb. 60

Bereich der Aufwölbung zeigt. Ob dies ein Phänomen veränderter lithologischer Struktur aufgrund der Aufwölbung ist oder gar ein Effekt der Temperatur - sofern die gesamte antisynklinale Erscheinung mit einer Temperaturanomalie zusammenhängt - läßt sich nicht entscheiden. Deutlich höher liegen die Q-Werte zwischen Conrad-Diskontinuität und Moho; es scheint sich kein Einfluß der Aufwölbung zu zeigen. Die hier gefundenen Werte für Q in der tieferen Kruste Norddeutschlands liegen sehr viel niedriger als die Werte, die Clowes, R.M. und E.R. Kanasewich [1970] aus zum Teil erheblich interferenzbehafteten Spektren ableiten.

Schließlich haben die wenigen Q-Werte überrascht, die für Reflexionen innerhalb des Moho-"Bandes" bestimmt werden konnten; sie scheinen - wenn keine Auswertefehler vorliegen - bemerkenswert niedrig zu sein. Das hier vorgestellte, bislang wenige Material erlaubt noch keine tiefere Analyse, so etwa, ob dies ein Effekt der in diesem Bereich ansteigender Geschwindigkeit ist^{*)}, ob es ein Effekt einer Feinstruktur der Moho ist (Lamellierung), der u.a. von Clowes, R.M. und E.R. Kanasewich [1970] diskutiert wird, oder ob es sich um einen Effekt im Zusammenhang mit partiellem Schmelzen handelt. Es mag in diesem Zusammenhang daran erinnert werden, daß sich auch der Übergang Erdmantel - Kern durch eine dünne Zone von unerwartet hoher Absorption auszeichnet [Teng, T.L., 1968].

^{*)} Zum Filtereffekt eines Geschwindigkeitsgradienten s. z.B. Menzel, H. und O. Rosenbach [1957] oder Harjes, H.P. [1971]; speziell für den Krusten-Mantel-Übergang: Richards, P.G. und C.W. Frasier [1976].

8. Literatur

- Aki, K. und M. Fehler, Interaction of seismic waves with a water-filled fracture, in: Los Alamos Progress Report LA-7109-PR "Hot Dry Rock Geothermal Energy Development Project", 110, 1978.
- Anderson, D.L., The anelasticity of the mantle,
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 14 (1-4), 135-164, 1967.
- Anderson, D.L. und C.B. Archambeau, The anelasticity of the earth, J. Geophys. Res., 69, 2071, 1964.
- Anderson, D.L., A. Ben-Menahem und C.B. Archambeau,
Attenuation of seismic energy in the upper mantle,
J. Geophys. Res., 70, 505, 1965.
- Anderson, D.L. und R. O'Connell, Viscosity of the earth,
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 14, 287-295, 1967.
- Anderson, D.L. und R.S. Hart, Absorption and the low velocity zone, Nature, 263, 397-398, 1976.
- Anderson, D.L., H. Kanamori, R.S. Hart und H.P. Liu,
The earth as a seismic absorption band,
Science, 196, 1104-1106, 1977.
- Anderson, D.L. und R.S. Hart, Attenuation models of the earth,
Phys. Earth + Plan. Inter., 16, 289-306, 1978.
- Anderson, D.L. und R.S. Hart, Q of the earth,
J. Geophys. Res., 83, 5869-5882, 1978.
- Asdente, M., M.C. Pascucci, A.M. Ricca und P. Venturini,
Quadratic response and second-order Kramers-Kronig
integral relations, Solid state Comm., 15, 1551-1553,
1974.
- Aurass, H. und S. Grässl, Eine spektrale Methode zur Untersuchung von Interferenzsystemen, Geophysik und Geologie, Geophys. Veröff. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Dritte Serie, 1 (2), 91-120, 1975 (Akademie-Verlag, Berlin).

Averbuch, A.G., Bestimmung der Geschwindigkeitsdispersion elastischer Wellen anhand der Amplitudencharakteristik des Mediums (aus dem Russischen Übersetzter Titel), Prikladnaja geofizika, 57, 50-60, 1969.

Averbuch, A.G. und N.A. Trapeznikova, Reflection and refraction of plane waves normally incident on the boundary of absorbing media, Izv. Earth Phys., No. 9, 74-83, 1972.

Azimi, Sh.A., A.V. Kalinin, V.V. Kalinin und B.L. Pivovarov, Impulse and transient characteristics of media with linear and quadratic absorption laws, Izv. Earth Phys., No. 2, 42-54, 1968.

Behrens, J. und L. Dresen, Eine Möglichkeit zur Laufzeitbestimmung reflektierter Wellen im Bereich der kritischen Entfernung, Z. Geophys., 35, 175-189, 1969.

Berckhemer, H., A possible scattering mechanism for linear seismic waves, Z. Geophys., 36, 523-529, 1970.

Blut, H., Ein Beitrag zur Theorie der Reflexion und Brechung elastischer Wellen an Unstetigkeitsflächen, Z. Geophys., 8, 130-144, 305-322, 1932.

Bogert, B.P., M.J.R. Healy und J.W. Tuckey, The quefrency analysis of time series for echoes: cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking, Proc. Symp. Time Series Analysis, M. Rosenblatt (Ed.), New York-London (Wiley), 1963.

Born, M., Optik, Berlin-Heidelberg-New York (Springer-Verlag), 1972.

Born, W.T., The attenuation constant of earth materials, Geophysics, 6, 132-148, 1941.

Brennan, B.J. und F.D. Stacey, Frequency dependence of elasticity of rock - test of seismic velocity dispersion, Nature, 268, 220-222, 1977.

- Budó, A., Theoretische Mechanik, Berlin, 1967.
- Bullen, K.E., An introduction of the theory of seismology, Cambridge, 1959.
- Buttkus, B., Homomorphic filtering-theory and practice, Geophys. Prosp., 23 (4), 712-748, 1975.
- Bath, M., Spectral analysis in geophysics, Amsterdam-Oxford-New York (Elsevier), 1974.
- Carpenter, E.W., Absorption of elastic waves - an operator for a constant Q mechanism, AWRE Report No. O-43/66 (Atomic Weapons Research Establishment), 1966.
- Clowes, R.M. und E.R. Kanasewich, Seismic attenuation and the nature of reflecting horizons within the crust, J. Geophys. Res., 75 (32), 6693-6705, 1970.
- Collins, F. und C.C. Lee, Seismic wave attenuation characteristics from pulse experiments, Geophysics, 21 (1), 16-40, 1956.
- Corinaldesi, E., An introduction to dispersion relations, Nuovo Cim., Suppl., 14, Ser. 10, No. 2, 369-384, 1959.
- Crowe, C. und K. Alhilali, Amplitudes of seismic events and their dependence on the absorption-dispersion pairs of the media, Paper presented on the 44th Meeting of the SEG, Dallas/Texas, 1974.
- Descheamps, A., Inversion of the attenuation data of free oscillations of the earth (fundamental and first higher modes), Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 50, 699-722, 1977.
- Dratler, J., W.E. Farrell, B. Block und F. Gilbert, High-Q overtone modes of the earth, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 23, 399-410, 1971.
- Duda, S.J. und R. Nortmann, The anelasticity of the earth mantle in the European area, Trans. Am. Geophys. Un., 58, 911, 1977.

- Dunkin, J.W., Scattering of a transient, spherical P wave by a randomly inhomogeneous, elastic half-space, *Geophysics*, 34 (3), 357-382, 1969.
- Ewing, W.M., W.S. Jardetzky und F. Press, *Elastic waves in layered media*, New York-Toronto-London, (McGraw-Hill), 1957.
- Fielitz, K., Untersuchungen zur Temperaturabhängigkeit von Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten in Gesteinen unter erhöhtem Druck, Dissertation TU Clausthal, 1971.
- Fielitz, K., Elastische Wellengeschwindigkeiten in verschiedenen Gesteinen unter hohem Druck und bei Temperaturen bis 750 °C, *Z. Geophys.*, 37, 943-956, 1971.
- Fischer, F.A., Einführung in die statistische Übertragungstheorie (BI-Hochschultaschenbücher Nr. 130/130a), Mannheim, 1969.
- Förtsch, O., Die Ursachen der Absorption elastischer Wellen, *Ann. Geofis.*, 9, 469-524, 1956.
- Futterman, W.I., Dispersive body waves, *J. Geophys. Res.*, 67 (13), 5279-5291, 1962.
- Grässl, S. und P. Finger, Zur Bestimmung von Absorptionskoeffizienten aus Reflexionsseismogrammen, *Geophysik und Geologie, Geophys. Veröff. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Dritte Serie*, 1 (2), 7-21, 1975, (Akademie-Verlag, Berlin).
- Grässl, S., K. Deubel und W.D. Hermichen, Untersuchungen zum Absorptions-Dispersions-Verhalten seismischer Wellen, *Seismology and Solid-Earth-Physics, Intern. Symp. Jena*, April 1-6, 1974, Potsdam 1975, 357-364.
- Hagedorn, R., Introduction to field theory and dispersion relations, *Fortschr. Phys.*, 5. Sonderband, 1963.

- Hall, I.H., Deformation of solids, London (Nelson), 1968.
- Hammond, A.L., Bright spot: better seismological indicators of gas and oil, Science, 185 (4150), 515-517, 1974.
- Harjes, H.P., Seismische Wellen in inhomogenen Medien, Diss. TU Braunschweig, 1971.
- Hart, R.S. und D.L. Anderson, Seismic velocities and density of an attenuating earth, J. Geophys., 43, 503-504, 1977.
- Hilgevoord, J., Dispersion relations and causal description, Amsterdam, 1960.
- Holbrow, C.H. und W.C. Davidson, An introduction to dispersion relations, Amer. J. Phys., 32 (10), 762-774, 1964.
- Hudson, J.A. und L. Knopoff, Signal generated seismic noise, Geophys. J. R. Astron. Soc., 11, 19-24, 1966.
- Jackson, D.D. und D.L. Anderson, Physical mechanisms of seismic-wave attenuation, Revs. Geophys. + Space Phys., 8 (1), 1-63, 1970.
- Jeffreys, H., The earth, Cambridge (5th Edition), 1970.
- D.S. Jones, The theory of electromagnetism, Oxford-London-New York-Paris (Pergamon Press), 1964.
- Kanamori, H., Spectrum of P and PcP in relation to the mantle-core boundary and attenuation in the mantle, J. Geophys. Res., 72, 559-571, 1967.
- Kanamori, H. und D.L. Anderson, Importance of physical dispersion in surface wave and free oscillation problems: a review, Revs. Geophys. + Space phys., 15 (1), 105-112, 1977.
- Kanasewich, E.R., Time sequence analysis in geophysics, Edmonton, Alberta, Canada (University of Alberta Press), 1975.

- Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald, Attenuation of small amplitude stress waves in solids, *Revs. Mod. Phys.*, 30 (4), 1178-1192, 1958.
- Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald, Models for acoustic loss in solids, *J. Geophys. Res.*, 65, 2191, 1960.
- Knopoff, L., Scattering of compression waves by spherical obstacles, *Geophysics*, 24 (1), 30-39, 1959.
- Knopoff, L., Scattering of shear waves by spherical obstacles, *Geophysics*, 24 (2), 209-219, 1959.
- Knopoff, L., Q, *Revs. Geophys.*, 2 (4), 625-660, 1964.
- Knopoff, L. und J.A. Hudson, Scattering of elastic waves by small inhomogeneities, *J. Acoust. Soc. Am.*, 36, 338-343, 1964.
- Knopoff, L. und G.J.F. MacDonald, Attenuation of small amplitude stress waves in solids, *Revs. Mod. Phys.*, 30 (4), 1178-1192, 1958.
- Kogan, S.Ya., A brief review of seismic wave absorption theories, *Isv. Earth Phys.*, 11, 3-28, 1966.
- Kohlrausch, F., *Praktische Physik III*, Stuttgart, 1968.
- Kolsky, H. The propagation of stress pulses in viscoelastic solids, *Phil. Mag.*, ser. 2, 1 (8), 693-710, 1956.
- Kolsky, H., *Stress waves in solids*, New York (Dover-Publications), 1963.
- Kovach, R.L. und D.L. Anderson, Attenuation of shear waves in the upper and lower mantle, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 54, 1855-1864, 1964.
- Kramers, H.A., La diffusion de la lumière par les atomes, *Atti Congr. Intern. Fisica*, Como 2, 545-557, 1927
 (siehe auch: Kramers, H.A.: Dispersion und Absorption von Röntgenstrahlen, *Physik. Z.*, 30, 1, 1929).

- Kronig de L., R., On the theory of dispersion of X-rays,
J. Opt. Soc. Am., 12 (6), 547-557, 1926.
- Lamb, G.L., The attenuation of waves in a dispersive medium,
J. Geophys. Res., 67 (13), 5273-5277, 1962.
- Landau-Lifschitz VI, Lehrbuch der theoretischen Physik VI:
Hydrodynamik, Berlin, 1966.
- Landau-Lifschitz VII, Lehrbuch der theoretischen Physik VII:
Elastizitätstheorie, Berlin, 1966.
- Lindero, J.P., Bright spot: a progress report and look ahead,
The phone, 1 (2), 18-20, 1974, (Reprint from World Oil,
April 1974).
- Liu, H.P., D.L. Anderson und H. Kanamori, Velocity dispersion
due to anelasticity; implications for seismology and
mantle composition, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 47,
41-58, 1976.
- Loeb, J., Attenuation des ondes sismiques dans les solides,
Geophys. Prosp., 9, 370-381, 1961.
- Lomnitz, C., Linear dissipation in solids, J. Appl. Phys., 28,
201-205, 1957.
- Maaß, H.W., Das "Vibroseeis"-System als optimales Laufzeit-
Verfahren, Erdöl und Kohle, 17 (9), 699-707, 1964.
- Macke, W., Wellen, Leipzig (Akadem. Verlagsges.), 1962.
- Mason, W.P., Physical acoustics and the properties of solids,
Princeton-Toronto-New York-London (van Norstrand), 1958.
- Mathews, J. und R.L. Walker, Mathematical methods of physics,
New York-Amsterdam (Benjamin), 1965.
- Mavko, G.M. und A. Nur, Wave attenuation in partially
saturated rocks, Geophysics, 44 (2), 161-178, 1979.

- McKenzie, D.P., The viscosity of the mantle,
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 14, 297-305, 1967.
- Meidav, T., Viscoelastic properties of the standard linear
solid, Geophys. Prosp., 12, 80-99, 1964.
- Menzel, H., On the propagation of seismic waves in a solid
body with elastic afterworking,
Geophys. Prospect., 2, 139-150, 1954.
- Menzel, H. und O. Rosenbach, Theoretische Untersuchungen über
den Einfluß der Verwitterungsschicht auf das Spektrum
elastischer Wellen in der Reflexionsseismik,
Geophys. Prosp., 5, 328-348, 1957.
- Merkulova, V.M., The frequency dependence of the damping of
ultrasound in rock in the megacycle region,
Izv. Earth Phys., 8, 47-60, 1966.
- Miles, J.W., Scattering of elastic waves by small inhomogeneities,
Geophysics, 25 (3), 642-648, 1960.
- Morse, Ph.M., Vibration and sound, New York, Toronto, London
(McGraw-Hill), 1948.
- Morse, Ph.M. und H. Feshbach, Methods of theoretical physics,
New York-Toronto-London (McGraw-Hill), 1953.
- Muskat, M. und M.W. Meres, Reflection and transmission
coefficients for plane waves in elastic media,
Geophysics, 5, 115-148, 1940.
- Nadeau, G., Introduction to elasticity,
New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London, 1964.
- Nakamura, S.T., On viscoelastic medium,
Sci. Rep. Tohoku Un. 1, 1949.
- Nakanishi, I., Regional differences in the phase velocity and
the quality factor Q of mantle Rayleigh waves,
Science, 200, 1379-1380, 1978.

Nortmann, R., Die Anelastizität des Erdmantels im europäischen Raum, Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1977.

Nur, A., Seismic velocity attenuation and hydraulic permeability: New experimental and theoretical results, Vortrag auf der EAEG-Tagung in Dublin, 1978.

Nussenzweig, H.M., Causality and dispersion relations, New York-London (Academic Press), 1972.

O'Brien, P.N.S., A discussion on the nature and magnitude of elastic absorption in seismic prospecting, Geophys. Prosp., 9, 261-275, 1961.

O'Brien, P.N.S., New techniques in seismic exploration for oil, Sci. Prog. Oxf., 64, 487-519, 1977.

O'Brien, P.N.S. und A.L. Lucas, Velocity dispersion of seismic waves, Geophys. Prosp., 19, 1-26, 1971.

O'Doherty, R.F. und N.A. Anstey, Reflections on amplitudes, Geophys. Prosp., 19, 430-458, 1971.

Orowan, E., Seismic damping and creep in the mantle, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 14, 191-218, 1967.

Papadakis, E.P., Ultrasonic attenuation caused by scattering in Polycrystalline media, in: Mason, W.P. (Ed.), Physical Acoustics, Vol. IV/B, New York, London (Acad. Press), 1968.

Pasechnik, V.I., Calculation of phase velocity dispersion in absorbing media, Izv. Earth Phys., 9, 34-39, 1969.

Peterson, C.W. und B.W. Knight, Causality calculations in the time domain: an efficient alternative to the Kramers-Kronig method, J. opt. Soc. Am., 63 (10), 1238-1242, 1973.

Post, E.J., Formal structure of electromagnetics, Amsterdam (North-Holland Publ.), 1962.

Proceedings of the International Upper Mantle Committee
Symposium on Non-Elastic Processes in the Mantle 1966,
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 14 (1-4), 1967.

Reiter, L., Reflection, refraction and mode conversion of
long-period surface waves and the measurement of Q^{-1}
for free oscillations, Bull. Seis. Soc. Am., 63 (5),
1709-1722, 1973.

Richards, P.G. und C.W. Frasier, Scattering of elastic waves
from depth-dependent inhomogeneities,
Geophysics, 41 (3), 441-458, 1976.

Ricker, N., The form and laws of propagation of seismic
wavelets, Geophysics, 18 (1), 10-40, 1953.

Robinson, E.A., Multichannel time series analysis with digital
computer programs, San Francisco-Cambridge-London-
Amsterdam (Holden-Day), 1967.

Rodean, H.C., Nuclear explosion seismology, capt. 5: anelastic
attenuation of seismic signals, AEC Critical Review Series
(available as TID-25572), 1971.

Roult, G., Attenuation of seismic waves of very low frequency,
Phys. Earth + Plan. Inter., 10, 159-166, 1975.

Savage, J.C. und H.S. Hasegawa, Evidence for a linear attenuation
mechanism, Geophysics, 32, 1003, 1967.

Savage, J.C. und M.E. O'Neill, The relation between the Lomnitz
and Futterman theories of internal friction,
J. Geophys. Res., 80 (2), 249-251, 1975.

Sawarenski, E.F. und D.P. Kirnos, Elemente der Seismologie und
Seismometrie (Akademie-Verlag), Berlin, 1960.

Schoenberger, M. und F.K. Levin, Apparent attenuation due to
intrabed multiples,
Geophysics, 39, 278-291, 1974.

- Schoenberger, M. und F.K. Levin, Apparent attenuation due to intrabed multiples II, *Geophysics*, 43, 730-737, 1978.
- Schwab, F., Scattering of shear waves by small transseismic obstacles, *Geophysics*, 30 (1), 24-31, 1965.
- Sellmeier, E., Zur Erklärung der abnormen Farbenfolge einiger Substanzen, *Pogg. Ann.*, 143, 272-282, 1871.
- Sharnoff, M., Validity conditions for the Kramers-Kronig relations, *Amer. J. Phys.*, 32, 40-44, 1964.
- Silva, W., Body waves in a layered anelastic solid, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 66 (5), 1539-1554, 1976.
- Silva, M.T. und E.A. Robinson, Use of the kepsrum in signal analysis, *Geoexploration*, 16, 55-73, 1978.
- Skudrzyk, E., *Die Grundlagen der Akustik*, Wien (Springer Verlag), 1954.
- Slichter, L.B. und V.G. Gabriel, Studies in reflected seismic waves, *Gerl. Beitr. Geophys.*, 38, 228-256, 1933.
- Sokolnikoff, I.S., *Mathematical theory of elasticity*, New York (Mc Graw Hill), 1956.
- Sokoloff, P.T. und V.J. Skriabin, Experimental and theoretical investigations on dispersion and absorption of elastic waves, *Gerl. Beitr.*, 49, 1937.
- Sommerfeld, A., *Optik*, Leipzig (Akadem. Verlagsges.), 1964.
- Spencer, T.W., C.M. Edwards und J.R. Sonnad, Seismic wave attenuation in nonresolvable cyclic stratification, *Geophysics*, 42 (5), 939-949, 1977.
- Stacey, F.D., M.T. Gladwin, B. McKavanagh, A.T. Linde und L.M. Hastic, Anelastic damping of acoustic and seismic pulses, *Geophys. Surveys*, 2, 133-151, 1975.

- Stocker, R.L. und M.F. Ashby, On the rheology of the upper mantle, *Revs. Geophys. + Space Phys.*, 11 (2), 391-426, 1973.
- Stratton, J.A., *Electromagnetic theory*, New York-London (McGraw-Hill), 1941.
- Strick, E., A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant-Q solids, *Geophysics*, 35 (3), 387-403, 1970.
- Symposium on Nonelastic Processes in the Mantle, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 14 (1-4), 1967.
- Taner, M.T. und F. Koehler, Velocity spectra-digital computer derivation and applications of velocity functions, *Geophysics*, 34 (6), 859-881, 1969.
- Teng, T.L., Attenuation of body waves and the Q structure of the mantle, *J. Geophys. Res.*, 73, 2195-2208, 1968.
- Thomson, K.E., Specification of two moduli of a viscoelastic material, *Geophys. Prosp.*, 15, 44-56, 1967.
- Thurston, G.E., Shear wave propagation in birefringent viscoelastic liquids of low rigidity and low viscosity, in: *Modern Developments in the Mechanics of Continua*, Ed.: S. Eskinazi, New York-London (Acad. Press), 1966.
- Toll, J.S., Causality and the dispersion relation: logical foundations, *Phys. Rev.*, 104 (6), 1760-1770, 1956.
- Tooley, R.D., T.W. Spencer und H.F. Sagoci, Reflection and transmission of plane compressional waves, *Geophysics*, 30, 552-570, 1965.
- Treitel, S., On the attenuation of small-amplitude plane stress waves in a thermoelastic solid, *J. Geophys. Res.*, 64 (6), 661-665, 1959.
- Tribolet, J.M., A new phase unwrapping algorithm, *IEEE Trans. Acoustics + Speech*, ASSP-25 (2), 170-177, 1977.

- Ulrych, T.J., Application of homomorphic deconvolution to seismology, *Geophysics*, 36 (4), 650-660, 1971.
- Walsh, J.B., Seismic wave attenuation in rock due to friction, *J. Geophys. Res.*, 71, 2591, 1966.
- White, J.E., Seismic waves: radiation, transmission and attenuation, New York-St.Louis-San Francisco-London-Toronto (McGraw Hill), 1965.
- White, J.E., Static friction as a source of seismic attenuation, *Geophysics*, 31, 333, 1966.
- De Witt, C. und R. Omnes, Dispersion relations and elementary particles, Paris-New York (Wiley), 1960.
- Wuenschel, P.C., Dispersive body waves - an experimental study, *Geophysics*, 30 (4), 539-551, 1965.
- Yamakawa, N., Scattering and attenuation of elastic waves, *Geophys. Mag. (Tokyo)*, 31, 63, 1962.
- Zener, Cl., Internal friction of solids, *Phys. Rev.*, 52, 1937, *Phys. Rev.*, 53, 1938.
- Zener, Cl., Elasticity and anelasticity of metals, Chicago, London, 1965.
- Zurmühl, R., Praktische Mathematik, Berlin-Göttingen-Heidelberg (Springer-Verlag), 1957.

9. Anhang: Dispersionsrelationen für das seismische wavelet

Für jedes seismische Signal $s(t)$ selbst gelten direkt Dispersionsrelationen, d.h. Imaginärteil und Realteil des Spektrums stehen als Hilberttransformierte (vgl. (4.1.20)) zueinander. Die Herleitung dieses Zusammenhangs geschieht ganz analog zu dem Gedankengang beim vermittelnden Integralkern in (4.1.1).

Das seismische Signal $s(t)$, im speziellen ein aus der seismischen Spur herausgeschnittenes wavelet, beginnt mit der "Einsatz"-zeit t' , die sich aus der schnellstmöglichen Ausbreitung des Ausgangsimpulses ergibt:

$$s(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < t' \quad (9.1)$$

oder, wenn man die Zeitzählung mit $t = t'$ beginnt (Verschiebung der Zeitskala):

$$s(\tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0 \quad (9.2)$$

Dies entspricht der Form (4.1.4) für den kausalen Integralkern.

Ganz entsprechend gehen wir von der Fourierdarstellung des seismischen Signals

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (9.3)$$

aus, setzen s analytisch fort und können $s(\bar{\omega})$ als Cauchy-Integral schreiben, da es in der gesamten unteren Halbebene analytisch ist (Beiträge zum Integral nur für $\tau > 0$). Den Integrationsweg wählen wir wie in Kap. 4.1 (Abb. 8), und wir erhalten schließlich - ganz analog zu (4.1.20) -

$$\left. \begin{aligned} S_R(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_I(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} \\ S_I(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_R(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Nutzt man die Symmetrieeigenschaften für Real- und Imaginärteil eines Spektrums einer reellen Zeitfunktion aus (4.1.9), so kann man - wie in (4.1.21) - schreiben:

$$\left. \begin{aligned} S_R(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\omega} \cdot S_I(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} \\ S_I(\omega) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_R(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Realteil und Imaginärteil eines seismischen wavelets sind also nicht unabhängig voneinander, sondern lassen sich ineinander umrechnen.

Im folgenden soll ein Beispiel vorgestellt werden, welches ohne besonderes Kriterium aus einer Einzelspur einer reflexionsseismischen Registrierung in Norddeutschland (true amplitude) ausgeschnitten wurde.

Zur numerischen Ausrechnung wurde zunächst eine FFT des Signals $s(t)$ ausgeführt; das in Abb. 62 dargestellte wavelet besteht aus 84 samples, hat bei einer sampling-rate von 2 msec also eine Datenlänge von 168 msec. Zur Erzielung einer höheren Auflösung im Frequenzbereich wurde der Zeitbereich durch "Anhängen von Nullen" auf 1024 Werte erweitert. Mit diesem Datensatz wurde die FFT ausgeführt, und wir sehen in Abb. 63 und Abb. 64 jeweils im linken Teil den Realteil und den Imaginärteil als Ergebnis dieser Fouriertransformation.

Zur Bestätigung der Dispersionsrelationen (9.4) bzw. (9.5) wurden diese in der Form (9.5) für die numerische Bearbeitung vorgenommen, da hier nur positive Frequenzen auftreten. Zu beachten ist, daß die numerische Integration nicht so einfach ausgeführt werden kann, da der Integrand ja Pole hat.

Wenn

$$q = 2^n = \begin{cases} \text{Anzahl der digitalen Daten.} \\ \text{des wavelets im Zeitbereich} \end{cases} \quad (9.6)$$

ist, in unserem Falle also $q = 1024$, so sind die Frequenzen, an denen die FFT einen Wert liefert:

$$\omega_j = 2\pi \frac{j}{q} = \Delta\omega \cdot j \quad (9.7)$$

$$j = 0, 1, \dots, q-1$$

wobei $\Delta\omega = \frac{2\pi}{q}$ die Kreisfrequenz-Schrittweite ist. (Um $\Delta\omega$ in $\frac{1}{\text{sec}}$ zu erhalten, muß q durch $\hat{q} = q \cdot \Delta t$ ersetzt werden, wo Δt die "Grundeinheit im Zeitbereich", die samplingrate - hier 0,002 sec - ist.) Das jeweilige Integral wurde dann in drei Einzelintegrale aufgeteilt:

$$\begin{aligned} I_1(\omega_k) &= \int_0^{\omega_k - \Delta\omega} \dots \\ I_2(\omega_k) &= \int_{\omega_k - \Delta\omega}^{\omega_k + \Delta\omega} \dots \\ I_3(\omega_k) &= \int_{\omega_k + \Delta\omega}^{\omega_k - \Delta\omega} \dots \end{aligned} \quad (9.8)$$

wobei $\omega_k = k \cdot \Delta\omega$ die Variable des Integralergebnisses ist. Die Integrale I_1 und I_2 lassen sich mit der Trapezformel (z.B. Zurmühl, R. [1957], S. 205) unmittelbar für die numerische Rechnung anwenden, während I_3 das Integral ist, welches eine Polstelle beinhaltet.

Betrachtet man den Pol näher, so stellt man fest, daß er von

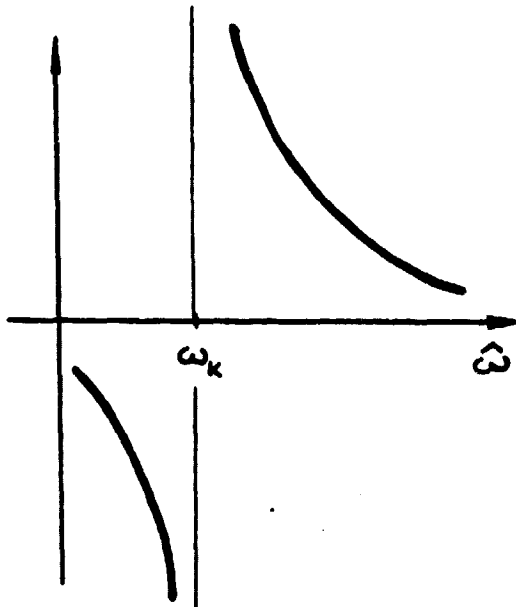


Abb. 61

erster Ordnung ist, entsprechend $\frac{1}{\hat{\omega} - \omega_k}$, d.h. er wechselt das Vorzeichen beim Durchgang durch die Polstelle. Wenn also der Integrand nach Abspaltung der Polstelle sich in der Umgebung des Pols nicht allzu stark verändert, werden sich die Beiträge mit "positiv Unendlich" und "negativ Unendlich" gegenseitig wegheben und nur endliche Beiträge übriglassen. Unter diesem Gesichtspunkt reicht es also aus, den Integranden bzw. die wavelet-spektren $S_I(\hat{\omega})$ und $S_R(\hat{\omega})$ um

die Polstelle $\hat{\omega} = \omega_k$ herum zu entwickeln. Setzt man

$$\hat{\omega} = \omega_k + h \quad \longrightarrow \quad h = \hat{\omega} - \omega_k \quad (9.9)$$

und entwickelt:

$$S_I(\hat{\omega}) = S_I(\omega_k) + (\hat{\omega} - \omega_k) \cdot \left. \frac{dS_I}{d\hat{\omega}} \right|_{\hat{\omega}=\omega_k} + (\hat{\omega} - \omega_k)^2 \cdot \left. \frac{d^2 S_I}{d\hat{\omega}^2} \right|_{\hat{\omega}=\omega_k} + \dots \quad (9.10)$$

sowie

$$S_R(\hat{\omega}) = S_R(\omega_k) + (\hat{\omega} - \omega_k) \cdot \left. \frac{dS_R}{d\hat{\omega}} \right|_{\hat{\omega}=\omega_k} + (\hat{\omega} - \omega_k)^2 \cdot \left. \frac{d^2 S_R}{d\hat{\omega}^2} \right|_{\hat{\omega}=\omega_k} + \dots \quad (9.11)$$

so ergibt sich die einfachste Näherung für das Integral I_3 dadurch, daß man nur das erste Glied der Taylorreihe (9.10) bzw. (9.11) verwendet. Durch Hinzunahme der höheren Terme läßt sich I_3 entsprechend genauer approximieren. Geht man mit den Ansätzen (9.10) bzw. (9.11) in die Integralformel ein, so treten Integrale vom Typ

$$\int_{\omega_k - \Delta\omega}^{\omega_k + \Delta\omega} \frac{\hat{\omega}^n}{\hat{\omega}^2 - \omega_k^2} d\hat{\omega}$$

auf, die sich für $n \leq 3$ elementar ausdrücken lassen durch Logarithmusfunktionen; $n \leq 3$ bedeutet, daß man die Taylorentwicklungen (9.10) und (9.11) bis einschließlich des quadratischen Gliedes verwendet. Insofern ergeben sich für das Integral I_3 drei Approximationsmöglichkeiten: 1. mit dem konstanten Glied der Taylorentwicklung, 2. einschließlich des linearen und 3. einschließlich des quadratischen Terms.

Mit der Diskretisierung

$$\omega_k = k \cdot \Delta\omega$$

und der Verwendung von k als Variable, anstatt von ω_k , was für die numerische Rechnung von Bedeutung ist, also

$$\omega_k \longrightarrow k$$

$$\omega_k + \Delta\omega = \omega_{k+1} \longrightarrow k+1$$

gewinnt man schließlich statt der Beziehungen (9.5) folgende numerischen Ausdrücke:

$$S_R(k) = S_R(\omega_k) = -\frac{2}{\pi} (A_1 + A_2 + A_3) \quad (9.12)$$

wobei A_1 dem Integral I_1 , A_2 dem I_2 und A_3 dem I_3 in der allgemeinen Formulierung von (9.8) entspricht. Es lautet dabei:

$$A_1(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{j}{(j^2 - k^2)} s_I(j) + \frac{(j-1)}{(j-1)^2 - k^2} s_I(j-1) \right] \quad (9.13)$$

$$A_2(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=k+2}^{\infty} \left[\frac{j}{(j^2 - k^2)} s_I(j) + \frac{(j-1)}{(j-1)^2 - k^2} s_I(j-1) \right] \quad (9.14)$$

Und schließlich $A_3(k)$ in drei verschiedenen Näherungen:

$$A_3^{(1)}(k) = \frac{1}{2} s_I(k) \cdot \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) \quad (9.15a)$$

$$A_3^{(2)}(k) = A_3^{(1)}(k) + \frac{(1+k)}{2} \left[s_I(k+1) - s_I(k-1) \right] \cdot \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) \quad (9.15b)$$

$$A_3^{(3)}(k) = A_3^{(2)}(k) + \frac{5}{8} k^2 \left[s_I(k+1) - 2 s_I(k) + s_I(k-1) \right] \cdot \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) \quad (9.15c)$$

wobei beachtet werden muß, daß

$$s_I(0) = 0 \quad (9.16)$$

ist.

Und für die duale Relation von (9.5) wird

$$s_I(k) = \frac{2k}{\pi} (A_4 + A_5 + A_6) \quad (9.17)$$

wobei A_4 dem Integral I_1 , A_5 dem I_2 und A_6 dem I_3 der Formulierung (9.8) entsprechen. Es lautet dann:

$$A_4 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{s_R(j)}{j^2 - k^2} + \frac{s_R(j-1)}{(j-1)^2 - k^2} \right] \quad (9.18)$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \sum_{j=k+2}^{q-1} \left[\frac{s_R(j)}{j^2 - k^2} + \frac{s_R(j-1)}{(j-1)^2 - k^2} \right] \quad (9.19)$$

Und A_6 wird wieder in drei verschiedenen Näherungsstufen angegeben:

$$A_6^{(1)}(k) = -\frac{1}{2k} s_R(k) \cdot \ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) \quad (9.20a)$$

$$A_6^{(2)}(k) = A_6^{(1)}(k) + \frac{1}{2} [s_R(k+1) - s_R(k-1)] \cdot \ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) \quad (9.20b)$$

$$A_6^{(3)}(k) = A_6^{(2)}(k) + \frac{1}{2} [s_R(k+1) - 2s_R(k) + s_R(k-1)] \cdot \left[1 - 2k \cdot \ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) \right] \quad (9.20c)$$

Dies sind die für die numerische Rechnung diskretisierten Ausdrücke (9.5).

Es kann nun vorkommen, daß das auf dem Rechner installierte Programm zur FFT mit anderem Vorzeichen im Exponenten definiert ist als hier durch (4.1.5) und (4.1.6), vgl. dazu Fußnote auf S. 72,^{*)} so hat man entsprechend den in der genannten Fußnote angegebenen Regeln zu verfahren, und das bedeutet, daß man in (9.12) und (9.17) genau das Vorzeichen wechseln muß.

^{*)} Dies ist der Fall bei dem nach Robinson, E.A. [1967], S. 63 "NLOGN" beim Leibniz-Rechenzentrum der Preussag AG installierten Programm.

Zum Austesten des Programms für die Ausdrücke A_1 bis A_6 wurden Testfunktionen verwendet, deren Hilbert-Transformierte bekannt sind^{*)}, und dabei zeigte sich, daß für A_3 und A_6 die erste Näherung (entspricht dem konstanten Glied in der Taylorentwicklung) bereits ausgezeichnete Ergebnisse bringt. Für das aus der seismischen Einzelspur ausgeschnittene wavelet $s(t)$, dargestellt in Abb. 62, wurden jeweils die Näherungen $A_3^{(3)}$ und $A_6^{(3)}$ verwendet. In den Abbildungen 63 und 64 sehen wir auf der linken Seite jeweils das Ergebnis der FFT-Rechnung, nach Realteil (Abb. 63) und Imaginärteil (Abb. 64). Diese Real- und Imaginärteile wurden dann in die Beziehungen (9.13) bis (9.15) und (9.18) bis (9.20) eingegeben und auf diese Weise die Relationen (9.5) überprüft. Das jeweilige Ergebnis sieht man im rechten Teil der Abbildungen 63 und 64. Die Dispersionsrelationen sind also - wie man sieht - im Rahmen der numerischen Rechengenauigkeit erfüllt.

^{*)} Es wurde verwendet

(a) Eingabe: $S_I(\omega) = \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$, muß ergeben

$S_R(y) = \frac{a}{y^2 + a^2}$ mit der folgenden Diskretisierung:

$$\omega = \Delta\omega \cdot j ; \quad y = \Delta\omega \cdot k ; \quad a = \Delta\omega \cdot 16 ;$$

$$\Delta\omega = 1, \quad j = 1 \dots 128 = 2^7$$

(b) Eingabe: $S_R(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$, muß ergeben

$S_I(y) = - \frac{y}{a(y^2 + a^2)}$ mit der gleichen Diskretisierung wie unter Beispiel (a).

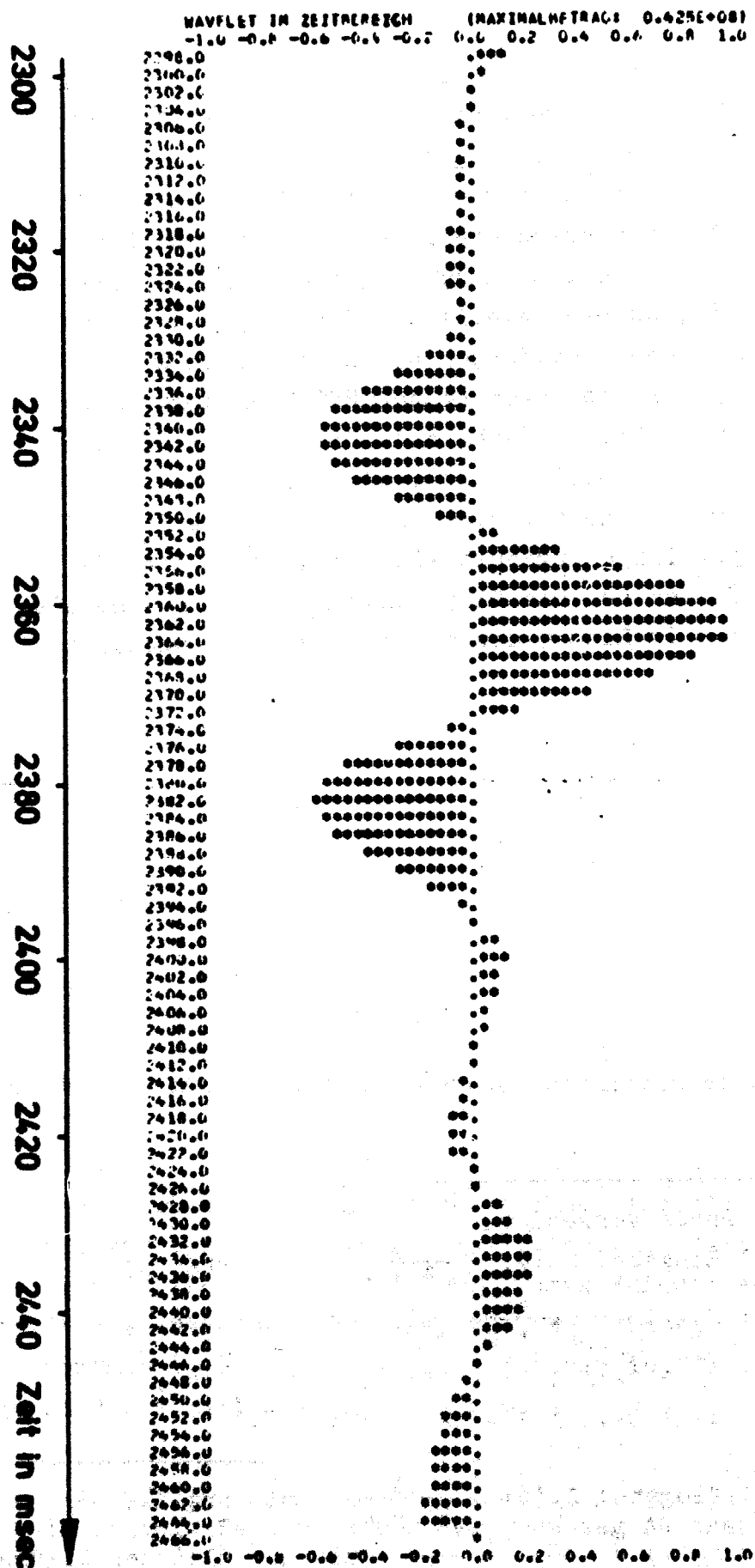
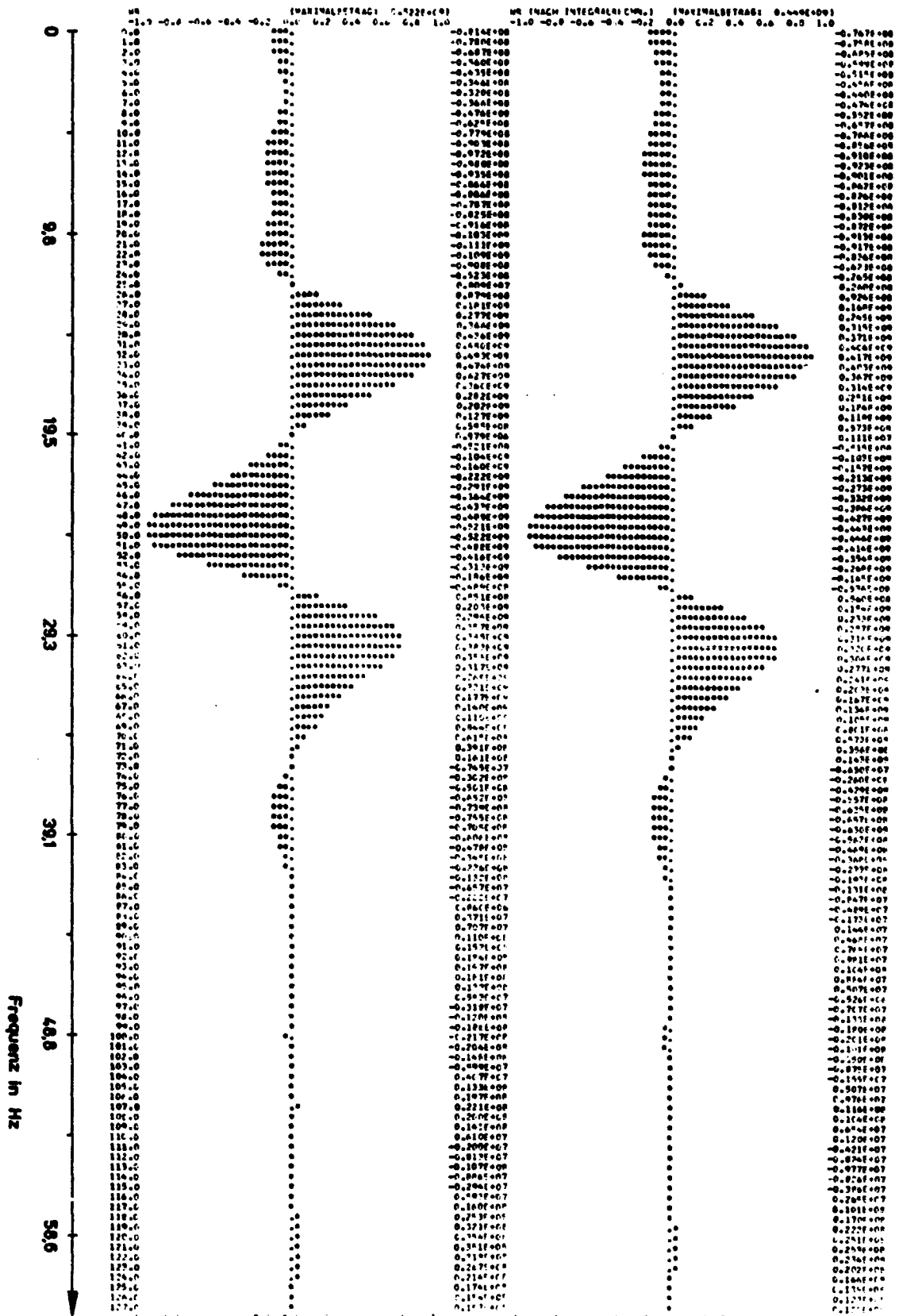
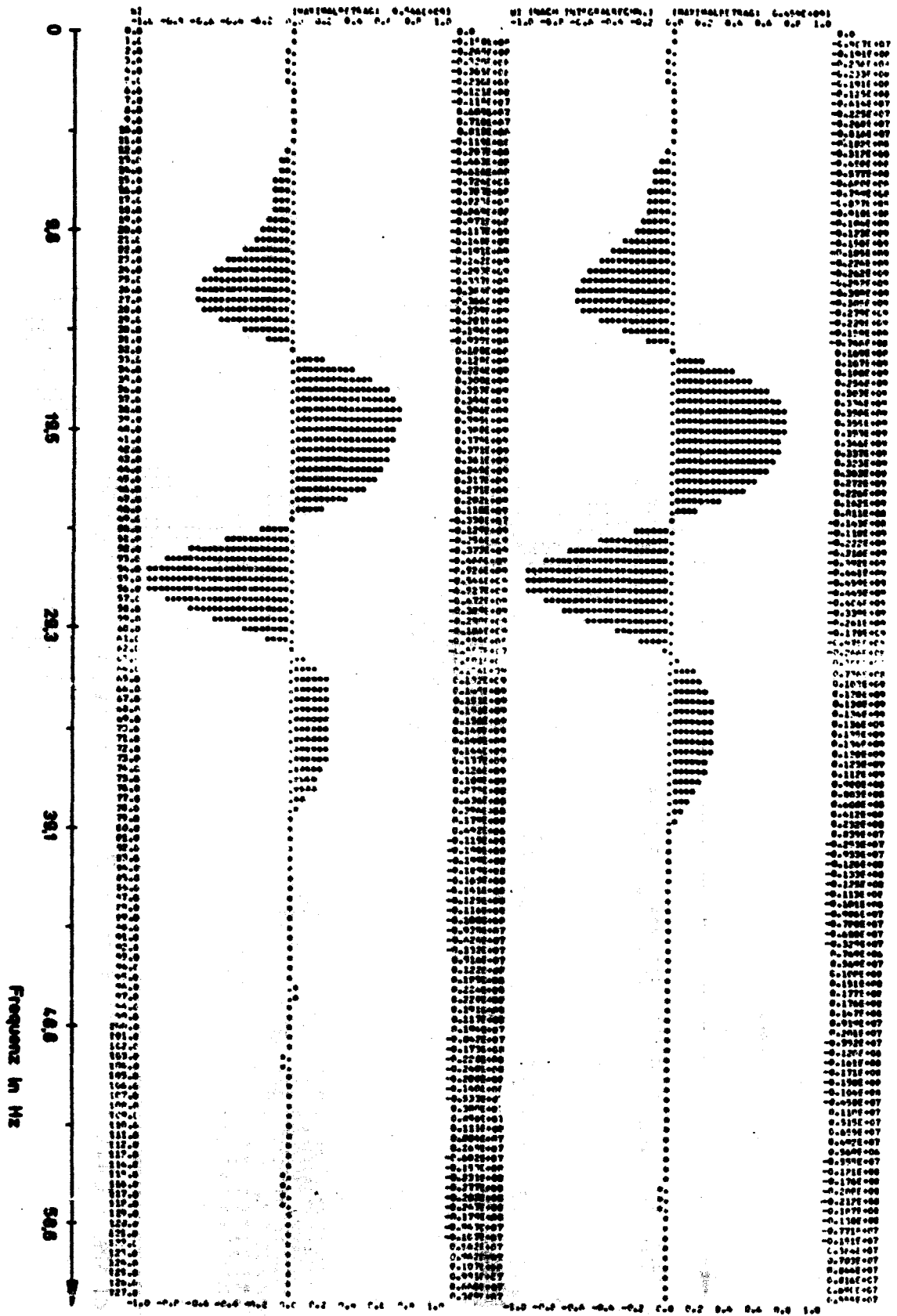


Abb. 62





Zusammenfassung

Die Absorption seismischer Wellen läßt sich durch eine Verallgemeinerung der Elastizitätstheorie auf komplexwertige elastische Moduln phänomenologisch beschreiben. Dadurch entsteht bei periodischen Belastungen eine elastische Hysterese, deren Fläche die absorbierte Energie ist. Normiert auf die Spitzenwertenergie eines Zyklus' erhält man eine materialspezifische, rheologische Eigenschaft, die durch den Qualitätsfaktor Q beschrieben wird.

Die elastische Wellengleichung mit komplexen elastischen Moduln hat als Lösung eine gedämpfte Welle; der Dämpfungskoeffizient a steht mit dem Q -Faktor des Mediums durch $a = \frac{\omega}{2Q \cdot c}$ im formalem Zusammenhang (ω = Kreisfrequenz, c = Phasengeschwindigkeit).

Als typische Beispiele linearen rheologischen Verhaltens werden die zur Klasse der "standard-linear-solid" gehörenden Modelle behandelt und deren Q -Faktor und Phasengeschwindigkeit berechnet. Die spezielleren Betrachtungen für Flüssigkeiten (Navier-Stokes'sche Gleichungen) führen auf quadratische Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten a , während der Experimentalbefund für feste Stoffe frequenzproportionales a zeigt. Dies kann man im phänomenologischen Modell nur durch Superposition verschiedener linearer viskoelastischer Prozesse beschreiben oder man muß nichtlineares rheologisches Verhalten annehmen. Auch zum nichtlinearen rheologischen Verhalten werden zwei Modelle (Loeb, Förtsch) diskutiert.

In der Dämpfung seismischer Wellen kommt neben der Absorption auch die Streuung zum Ausdruck. Quantitative Messungen hierzu liegen nur aus dem Ultraschallbereich der Laborgeophysik vor. Die Theorie der Streuung elastischer Wellen ist komplizierter als die Streutheorie der elektromagnetischen oder akustischen Wellen, da Longitudinal- und Transversalwellen stets gemeinsam auftreten und sich an Streuzentren ineinander umwandeln.

Jedes lineare rheologische Modell hat eine charakteristische Frequenzabhängigkeit der Absorption und der Phasengeschwindigkeit. Aus der ganz allgemeinen Bedingung der Kausalität (keine Impulsantwort zeitlich vor der Anregung) wird ein Zusammenhang zwischen Absorption und Phasengeschwindigkeit (d.h. Dispersion) formuliert. Die Herleitung dieser Dispersionsrelationen (die den Kronig-Kramers-Relationen der Optik entsprechen) basiert auf der Grundlage des "Boltzmann'schen Ansatzes" als allgemeinste Form eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Deformationen.

Aus dem Experimentalbefund eines frequenzproportionalen Absorptionskoeffizienten folgt, daß die Phasengeschwindigkeit logarithmisch von der Frequenz abhängt, sofern die Annahme der Linearität des rheologischen Modells zutrifft. In neueren Arbeiten, insbesondere zur Messung der Absorption in situ, wird allgemein ein lineares Verhalten angenommen.

Aus Kenntnis der Dispersion und Absorption, die wegen der Dispersionsrelationen beide nur von einem Materialparameter abhängen, wird eine Übertragungsfunktion aufgestellt, die sowohl die Veränderung des Phasenspektrums als auch des Amplitudenspektrums eines seismischen Impulses beim Durchgang durch das Medium beschreibt. Diese Übertragungsfunktion wird dann für die Anwendung auf inhomogene Medien formuliert.

Im Zusammenhang mit der Frage von Absorption und Dispersion bei linearem und bei nichtlinearem Absorptionsmechanismus wird die gelegentlich vorgeschlagene Methode der Absorptionsbestimmung durch "rise-time-analysis" des seismischen Signals kritisch untersucht (Kap. 4.2 und Kap. 4.3).

Nach Betrachtungen zur Absorption und Dispersion seismischer Wellen im Erdkörper wird die Frage der Reflexion und Transmission an der Grenzfläche zweier nichtideal-elastischer Medien näher untersucht. Diese Frage ist von Bedeutung besonders bei der seismischen Erforschung der Erdkruste nach der reflexions-

seismischen Methode. Wegen der komplexen elastischen Moduln wird auch das Brechungsgesetz komplex. Dies hat zur Folge, daß durch Reflexion und Transmission inhomogene Wellen entstehen, das sind Wellen, bei denen die Richtung, in der ihre Amplitude abnimmt, und die Ausbreitungsrichtung nicht mehr übereinstimmen. Für den Fall der senkrechten Inzidenz, der für die praktische Exploration von Bedeutung ist, können Transmissions- und Reflexionskoeffizient explizit angegeben werden. Sie sind frequenzabhängig aufgrund des Einflusses der Absorption und außerdem komplex, was einen (frequenzabhängigen) Phasensprung der Welle bei Reflexion und Transmission zur Folge hat. Reflektivität und Transmissionsvermögen sind jetzt außer vom Kontrast der akustischen Impedanz $\rho \cdot c$ auch vom Kontrast der Absorptionskoeffizienten der Medien abhängig.

Zur Bestimmung der Dämpfung aus Reflexionsseismogrammen werden aus der Übertragungsfunktion (Kap. 4.3) zwei einander äquivalente Methoden entwickelt: die Spektrendivisionsmethode, die die frequenzabhängige Bedämpfung des Amplitudenspektrums eines seismischen Impulses ausnutzt, und die Phasendifferenzmethode, die die Veränderung der Phasenlage im Spektrum infolge der Dispersion zur Grundlage hat.

Die Anwendung auf praktische Meßdaten zeigte jedoch, daß sich die Spektren seismischer Impulse nicht so verhalten, wie es die theoretischen Vorstellungen erwarten lassen: Mit Hilfe modellseismischer Versuche konnte geklärt werden, daß durch Interferenzen als Folge von Feinschichtungen (Lamellierung) der geologischen Formationen die Spektren verfälscht werden (interne multiple Reflexionen).

Zur Elimination derartiger Interferenzeffekte wurden verschiedene Methoden erörtert, erprobt und theoretisch untersucht:

- (1) Ausnutzung des Gangunterschiedes der Interferenzen von einer seismischen Spur zur nächsten ("Stapeln im Frequenzbereich").

- (2) Ausnutzung des glättenden Effektes von Integrationsoperationen durch Berechnung der Autokovarianzfunktionen; durch die selektive Wirkung der Absorption (Tiefpaß) muß die Autokovarianzfunktion um so breiter werden, je stärker die Absorption auf den seismischen Impuls einwirkt.
- (3) Einpassung geeigneter, physikalisch plausibler Modellspektren in die durch Interferenzmuster oszillierenden gemessenen Spektren. Der Absorptionseffekt zeigt sich in einer Verlagerung des spektralen Maximums und in einer Veränderung der Asymmetrie ("Schiefe") des Spektrums.
- (4) Anwendung einer vereinfachten Version des homomorphen Filterns. Die Vereinfachung liegt in der Anwendung allein auf das Amplitudenspektrum. Mit diesem Verfahren gelang die Elimination der störenden Interferenzen.

Mit der Methode des homomorphen Filterns wurden zwei unterschiedliche seismische Profile bearbeitet, die typische geophysikalische Verhältnisse aufzeigen sollen: Einmal die Sedimentformationen im norddeutschen Bereich, zusammen mit einem Salzstock. Die Absorption der Sedimente zeigt Werte zwischen $Q = 70 \dots 200$. Markant ist die Erhöhung der Absorption für die gleiche Formation an Stellen über dem Salzstock und an seinem Rande. Zum zweiten wurde ein Tiefenaufschluß bearbeitet, der deutliche Reflexionen aus Conrad- und Moho-Diskontinuität zeigt. Zwischen Zechsteinbasis und Conrad-Diskontinuität wurde $Q = 80 \dots 200$ gefunden, wobei die niedrigeren Q -Werte (höhere Absorption) dem Bereich einer anomalen Aufwölbung von Conrad- und Zechsteinbasis zuzuordnen sind. Die Absorption in der tieferen Erdkruste zwischen Conrad- und Moho-Diskontinuität ist erheblich geringer mit $Q = 200 \dots \infty$. Im Bereich des Moho-Reflexionsbandes selbst scheint die Absorption noch einmal deutlich erhöht zu sein.

Im Anhang der Arbeit wird gezeigt, daß für das Spektrum eines jeden seismischen wavelets Dispersionsrelationen (vom Typ der Hilbert-Transformation) gelten müssen. Es wird der Realteil aus dem Imaginärteil und der Imaginärteil aus dem Realteil des Spektrums berechnet und mit dem Originalspektrum verglichen.

Danksagung

Die vorstehende Arbeit konnte ich am Institut für Geophysik und Meteorologie der Technischen Universität Braunschweig anfertigen. Für diese Möglichkeit und für die Unterstützung und das ständige Interesse an dieser Arbeit möchte ich dem Institutsdirektor, Herrn Professor W. Kertz, besonders danken. Ihm verdanke ich auch die Einleitung der Verbindungen zur PREUSSAG AG, Erdöl und Erdgas, in Hannover.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. G. Dohr von der PREUSSAG AG, Erdöl und Erdgas, in Hannover für sein stetiges Interesse an den numerischen Analysen zur Absorptionsbestimmung, für die unbürokratischen Hilfen bei der Bereitstellung von originalem Seismogramm-Datenmaterial und bei der Möglichkeit zum Rechnen am Leibniz-Rechenzentrum der PREUSSAG AG. Die Herren Stiller, Echterhoff und Wilhelm haben mir bei der Auswahl und Bereitstellung geeigneter Seismogrammbeispiele geholfen.

Frau M. Hentschke vom Leibniz-Rechenzentrum hat alle meine zahlreichen mathematisch entwickelten Verfahren und Versuche programmiert, betreut und getestet. Ich bin ihr für ihre stets freundliche Bereitschaft, für ihre schnelle und sorgfältige Arbeit dankbar.

Die Frage der Interferenzen durch interne multiple Reflexionen konnte ich durch modellseismische Messungen, die am Institut für Angewandte Geophysik, Petrologie und Lagerstättenforschung der TU Berlin unter Herrn Prof. J. Behrens ausgeführt wurden, weiter klären. Für die Überlassung dieser Messungen zu meiner Auswertung und für manche fruchtbare Diskussion, die ich an diesem Institut hatte, sowie für sein persönliches Interesse an meiner Arbeit danke ich Herrn Prof. Behrens.

Ebenso gilt mein Dank auch Herrn Professor O. Rosenbach, dem Direktor des Instituts für Geophysik der Technischen Universität Clausthal, für sein wohlwollendes Interesse an meiner Arbeit.

Meinem früheren Kollegen am Institut, Herrn Dr. B. Hente, bin ich für einige Diskussionen und Hinweise zum homomorphen Filtern dankbar.

Schließlich sei erwähnt, daß ein Teil der Arbeiten im Rahmen des BMFT-F und E-Projektes ET 3117 A der PREUSSAG AG (C II: "Untersuchungen über Frequenzen reeller Wellen in verschiedenen Zeitbereichen") finanziell gefördert wurde; hierfür sei an dieser Stelle ebenfalls gedankt.